PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. 1. August 1917. Redaktionsschluß für No. 16 am 27. Juli 1917. 18. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

H. Kost, Ein Pendelversuch für das physikalische Praktikum. S. 341.

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. II. S. 341.

T. Heurlinger, Über eine in metallisch leitenden Kristallen zu erwartende elektrische Nachwirkung. S. 345.

K. Uller, Bisherige Elektrodynamik und das Interferenz-Prinzip. S. 347.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

F. Ehrenhaft, Zur Physik des millionstel Zentimeters. S. 352.

Berichtigung. S. 368.

Personalien. S. 308.

Angebote. S. 368.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Ein Pendelversuch für das physikalische Praktikum.

Von H. Kost.

Der folgende Pendelversuch bezweckt, dem Praktikanten den Übergang vom physikalischen Experiment zu dessen rechnerischer Auswertung mit dem Differentialquotienten zu zeigen.

Die praktische Aufgabe ist die Ermittlung der richtigen Pendellänge für ein gegebenes Uhrwerk durch Rechnung. Die vorausgesetzten Hilfsmittel sind:

1. Ein Uhren-Gangwerk mit Sekundenzeiger und einem Pendel, dessen Schwingungszahl sich in weiten Grenzen verändern läßt.

2. Eine einregulierte Uhr mit Sekundenzeiger.

Der Gang der Beobachtungen läuft an Hand der folgenden Rechnung: Aus der allgemeinen Gleichung für das mathematische Pendel folgt die für die Rechnung nötige Beziehung:

$$l = a \cdot t^2, \tag{1}$$

worin l die Pendellänge in Millimetern, t die Schwingungszeit in Sekunden und a eine Konstante gleich 248,533 mißt. Die erste Beobachtung bestimmt für die Schwingungszeit des willkürlich eingestellten Pendels, beispielsweise gleich 0,8 sec, die Gangdifferenz der beiden Uhren Δt mit 0,057 143 sec für eine Pendelschwingung. Durch doppelte Anwendung von Gleichung (1) erhält man die gewünschte Längenkorrektion Δl für das Pendel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l = l - l_1 &= a(t^2 - t_1^2) \qquad t_1 = t \pm \Delta t. \\ &= a(t^2 - (t \pm \Delta t)^2) \\ &= a\,\Delta t(2t \pm \Delta t) \\ &= 248{,}5 \cdot 0{,}094\,694 = 23{,}5\ \text{mm} \end{aligned}\right| \tag{2}$$

für das angegebene Beispiel.

Nun ist die Änderung der Pendellänge Δl für eine bestimmte Zeitdifferenz abhängig von der Pendellänge selbst oder der entsprechenden Schwingungszahl oder deren Veränderung Δt. Diesen Funktionswert können wir durch Differentiation der Gleichung (1) sofort erhalten; er ist aber durch Gleichung (2) bereits abgeleitet. Schreiben wir diese in der Form

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = 2at \pm \Delta t, \tag{3}$$

so erhalten wir für den Differentialquotienten

$$\frac{dl}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = 2at. \tag{4}$$

Eine weitere Ausführung, sowie ein Hinweis auf die graphische Bedeutung der beiden Funktionen (1) und (4) erübrigt sich an dieser Stelle.

(Eingegangen 16. Juni 1917.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

II.

Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes.

Wir wollen, unter Zugrundelegung des in der ersten Abhandlung aufgestellten mechanischen Prinzips

$$\sum \Big[\delta x \Big\{ \mu(x,y,z,t) \frac{du(x,y,z,t)}{dt} d\tau + 2 \int_{\Omega} \mu(\xi,\eta,\zeta,t) \Big(u(\xi,\eta,\zeta,t) - u_0(x,y,z,t) \Big) \dot{u}_\nu \, d\omega \Big\} + \cdots \Big] = 0, \tag{1}$$

die Bewegungsgleichungen in einem inkompressiblen Medium ableiten, für das wir die Bedingung:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

hinzunehmen müssen; wir gehen in der üblichen

Weise vor, indem wir die Bedingung mit Hilfe eines Multiplikators

$$+p(x,y,z,t)\,\delta\tau$$

einführen, also

$$+p(x,y,z,t)\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)$$

zu dem Faktor von $\delta\tau$ in (1) hinzuaddieren.

Es sei sogleich bemerkt, daß nicht stets an eine absolut strenge Inkompressibilität gedacht wird, sondern wir denken an ein „schwach kompressibles Medium", für welches wir in einer gewissen Annäherung die Inkompressibilitätsbedingung voraussetzen können, und ich möchte hier nebenher meiner an dieser Stelle nicht näher zu begründenden Ansicht Ausdruck geben, daß man in jedem Medium bei der Betrachtung von Schwingungen auf diesem Wege zu einer um so größeren Annäherung gelangen wird, je kleiner die Schwingungsdauer der zu betrachtenden Schwingungen ist. Es wird auch für die Feldgleichungen nichts ausmachen, wenn wir für die sichtbaren Geschwindigkeiten des Mediums (u_0, v_0, w_0) an Stelle der Inkompressibilitätsbedingung andere Voraussetzungen einführen würden, z. B. die Annahme, daß die sichtbare Bewegung wie in einem vollkommenen Gase vor sich geht, oder dergl. Es ist aber für die erste Einführung am einfachsten, allgemein die Inkompressibilität in einer gewissen großen Annäherung vorauszusetzen; wenn diese Bedingung auch für die Schwingungen mit der sehr kleinen Schwingungsdauer T in einer sehr großen Annäherung erfüllt sein soll, so soll doch auch hier der Spielraum für ganz geringe Dichteänderungen gegeben sein, ohne welche ja Pulsationen von der Schwingungsdauer T gar nicht möglich wären, also

$$\left.\begin{aligned}\mu(x,y,z,t)&=\mu_0(x,y,z,t)+\varepsilon\,,\\ \frac{d\varepsilon}{dt}&=-\mu_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

wo ε gegen μ_0 ganz außerordentlich klein sein soll. μ, u, v, w sollen stetige Funktionen der Stelle und der Zeit sein. Wo Sprungflächen (z. B. an der Grenze zweier Medien) für diese Funktionen in Betracht gezogen werden, sind zunächst dünne Schichten anzunehmen, in denen die Sprünge durch rasche stetige Änderungen vermittelt werden, und es ist im allgemeinen besonders zu untersuchen, ob der Einfluß dieser Schichten zu vernachlässigen ist oder nicht.

Aus dem Fundamentalprinzip (1) ergeben sich die drei Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mu\frac{du}{dt}=&-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\hat{u}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\right)\\ &+2\left\{\frac{\partial\mu u}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial\mu u}{\partial y}\hat{v}+\frac{\partial\mu u}{\partial z}\hat{w}\right\},\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

welche zu (3) hinzuzunehmen sind.

Wir sehen, daß durch das Individualitätsprinzip die Glieder

$$2\mu\hat{u}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\right)+2\left\{\frac{\partial\mu u}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial\mu u}{\partial y}\hat{v}+\frac{\partial\mu u}{\partial z}\hat{w}\right\},\ldots$$

zu den gewöhnlichen Gleichungen der Hydrodynamik auf der rechten Seite hinzutreten; in der klassischen Hydrodynamik sind diese Glieder zu vernachlässigen.

Es handelt sich nun darum, aus diesen Gleichungen zunächst die Bestimmung der schwingenden Bewegungen herauszuschälen, das soll die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung sein, während wir die Bestimmung der sichtbaren Bewegungen erst später ins Auge fassen werden. Hierbei wird uns eine Vereinfachung große Dienste leisten, welche ich als die Voraussetzung des „universellen Dralles" bezeichne. Wir wollen Lösungen der Bewegungsgleichungen finden, welche von der folgenden Form sind:

$$\left.\begin{aligned}\mu u=\mu_0\Big\{&u_0+u_1\cos\frac{t}{T}2\pi\\ &+u_2\sin\frac{t}{T}2\pi\Big\}=u'+U'\,,\\ \mu v=\mu_0\Big\{&v_0+v_1\cos\frac{t}{T}2\pi\\ &+v_2\sin\frac{t}{T}2\pi\Big\}=v'+V'\,,\\ \mu w=\mu_0\Big\{&w_0+w_1\cos\frac{t}{T}2\pi\\ &+w_2\sin\frac{t}{T}2\pi\Big\}=w'+W',\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

wo, unter Verwendung des besonderen Differentiationszeichens $\frac{d}{dt}$ mit der Definition:

$$\frac{df(x,y,z,t)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}u_0+\frac{\partial f}{\partial y}v_0+\frac{\partial f}{\partial z}w_0\,,$$

u', v', w' die Bedingungen

$$\frac{du'}{dt}=\frac{dv'}{dt}=\frac{dw'}{dt}=0\,,\qquad(6)$$

U', V', W' die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}U'&=\frac{\partial\Phi^{1})}{\partial x}-a\left(\frac{\partial W'}{\partial y}-\frac{\partial V'}{\partial z}\right)\\ V'&=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-a\left(\frac{\partial U'}{\partial z}-\frac{\partial W'}{\partial x}\right),\\ W'&=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-a\left(\frac{\partial V'}{\partial x}-\frac{\partial U'}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

erfüllen sollen und a eine sehr kleine Konstante vorstellt, auf deren Größenordnung wir weiter unten zurückkommen.

1) Wo Φ und seine ersten Ableitungen als stetige Funktionen von x, y, z, t zu betrachten sind.

Es handelt sich also um die Voraussetzung eines etwas komplizierteren Zustandes, als der oft in der Hydrodynamik vorausgesetzte Zustand der Wirbellosigkeit ist; zu einer gleichförmigen und zu einer wirbellosen Bewegung kommt noch im allgemeinen eine Wirbelbewegung hinzu, deren Geschwindigkeitskomponenten bzw. den Wirbelkomponenten proportional sind, ein „universeller Drall" mit außerordentlich kleiner Proportionalitätskonstante.

Wenn wir Lösungen finden, welche der Voraussetzung des universellen Dralles entsprechen, so handelt es sich hier offenbar um keine prinzipielle, mechanische Fundamentalhypothese, wie bei der Voraussetzung des mechanischen Grundprinzips, sondern um die Voraussetzung eines gewissen Anfangszustandes, der sich so zufällig zu einer Anfangszeit vorfand.

Bezüglich der Zerlegungen von der Art:

$$\left.\begin{aligned} \mu u &= \mu_0\left\{u_0 + u_1\cos\frac{t}{T}2\pi + u_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right\},\ldots\\ u' &= u'_0 + u'_1\cos\frac{t}{T}2\pi + u'_2\sin\frac{t}{T}2\pi,\ldots\\ U' &= U'_0 + U'_1\cos\frac{t}{T}2\pi + U'_2\sin\frac{t}{T}2\pi,\ldots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

muß hier noch eine wichtige Bemerkung hinzugefügt werden. Wenn wir, wie in den grundlegenden Betrachtungen der ersten Abhandlung, verlangen, daß

$$T\frac{du_0}{dt},\ T\frac{du_1}{dt},\ T\frac{du_2}{dt},\ldots$$

zu vernachlässigen sind, so genügt dies wohl, wenn man nur mit den Geschwindigkeiten, nicht mit den Beschleunigungen zu rechnen hat; nunmehr müssen wir die Zerlegung etwas schärfer fassen, indem wir auch verlangen, daß die Größen

$$T\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},\ T\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\ T\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\ldots$$

zu vernachlässigen sind; andernfalls würde man über Größen von der Art

$$TF(x,y,z,t)\cos\frac{t}{T}2\pi,\ TF(x,y,z,t)\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

wenn $F(x,y,z,t)$ von ähnlicher Größenordnung ist, wie z. B. $u_1, u_2, \ldots$, nicht entscheiden können, ob sie zu der einen oder andern Art der Geschwindigkeiten gehören, und ihre Ableitungen nach der Zeit würden doch bereits ihrer Größenordnung nach zu berücksichtigen sein.

Wegen der Gleichungen (6) werden in großer Annäherung

$$u'_1 = u'_2 = v'_1 = v'_2 = w'_1 = w'_2 = 0 \quad (9)$$

sein und

$$u_0 = u'_0 + U'_0,\ldots, \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W'_1}{\partial y} - \frac{\partial V'_1}{\partial z} &= \frac{\partial \mu_0 w_1}{\partial y} - \frac{\partial \mu_0 w_1}{\partial z},\\ \frac{\partial W'_2}{\partial y} - \frac{\partial V'_2}{\partial z} &= \frac{\partial \mu_0 w_2}{\partial y} - \frac{\partial \mu_0 v_2}{\partial z},\ \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Machen wir von der Form (5) der Größen μu, μv, μw unter Berücksichtigung der Bedingungen (6) und (7) Gebrauch, so ist der Kosinusterm[1]) der Größe

$$\mu\frac{du}{dt} = \frac{d\mu u}{dt} + \mu u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

der folgende:

$$-\frac{2\pi}{T}a\mu_0\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mu_0 u_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mu_0\frac{du_1}{dt} + \mu_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y}v_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right),$$

wenn μ_0 konstant ist und φ_1 eine mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktion der Stelle und der Zeit vorstellt, und so ergibt sich aus der ersten Gleichung (4) durch Gleichsetzung der Kosinusterme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x}u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y}v_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\\ &\quad - u_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)\\ &\quad + \frac{2\pi}{T}a\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

analog zwei andere Gleichungen, welche durch zyklische Vertauschung entstehen, und in derselben Weise durch Gleichsetzung der Sinusterme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial y}v_2 + \frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\\ &\quad - u_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)\\ &\quad - \frac{2\pi}{T}a\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad (12b)$$

und analog zwei andere Gleichungen, welche durch zyklische Vertauschung entstehen. Dabei sind φ_1 und φ_2 zwei mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen der Stelle und der Zeit.

Die Bedingung, daß die Funktionen

$$u_1,\ v_1,\ w_1;\quad u_2,\ v_2\ w_2$$

im Unendlichen verschwinden, würde uns von den Funktionen φ_1 und φ_2 befreien, wenn wir für dieselben die Gleichungen

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 0 \quad (13)$$

nachweisen könnten. Das ist nun tatsächlich für die drei Hauptfälle möglich, welche für uns in Betracht kommen:

1) Wir werden bei Zerlegungen von der Art

$$f = f_0 + f_1\cos\frac{t}{T}2\pi + f_2\sin\frac{t}{T}2\pi$$

f_0 kurz den sichtbaren Term, f_1 den Kosinusterm und f_2 den Sinusterm nennen.

1. Der Fall der strengen Inkompressibilität für die schwingenden Bewegungen:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

(Fall des reinen Äthers). In diesem Falle ergeben sich die Gleichungen (13), wenn man die Gleichungen (12a) und (12b) bzw. nach x, y, z differenziert und addiert.

2. Der Fall, daß zwar

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0\,,$$

daß aber Elemente von sehr kleinen Dimensionen (Elektronen) vorhanden sind, denen ganz bestimmte konstante

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\vartheta_1, \text{gleich} + |\vartheta_1| \text{od. gleich} - |\vartheta_1|$$

zukommen, und deren sichtbare Geschwindigkeiten Bewegungen starrer Körper entsprechen. (Fall von Elektronen mit sichtbar starrer Bewegung.)

3. Der Fall, in dem wieder

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

überall erfüllt ist, dagegen in jedem kleinen Raumgebiete eine große Zahl von Elektronen mit positiven und negativen ϑ_1 vorhanden sind, und zwar eine gleich große Zahl beider Elektronenarten, mit Geschwindigkeiten

$$A+\alpha,\ B+\beta,\ C+\gamma$$

für die Elektronen mit positivem ϑ_1,

$$A-\alpha,\ B-\beta,\ C-\gamma$$

für die Elektronen mit negativem ϑ_1, wobei A, B, C Geschwindigkeiten starrer Körper sind, während diese Voraussetzung für die Geschwindigkeiten α, β, γ nicht erfüllt zu sein braucht.

In den Fällen (2) und (3) ergibt sich in derselben Weise, wie im Falle (1), daß die Gleichungen (13) erfüllt sein müssen, im Falle (3) wenigstens für die Mittelwerte der φ_1 und φ_2 in kleinen Raumgebieten. Aus den drei genannten Fällen lassen sich im übrigen die wichtigsten, in der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen vorkommenden Fälle kombinieren.

Indem wir noch zur Abkürzung

$$\frac{2\pi a}{T}=c \quad [1] \qquad (14)$$

setzen, ergeben sich für die drei Hauptfälle die folgenden Gleichungssysteme:

1. Fall. (Reiner Äther).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}\left\{\frac{du_1}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_1-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_1-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\},\ \ldots,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{du_2}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_2-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_2-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\},\ \ldots,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0\,.
\end{aligned}\right| \qquad (15)$$

2. Fall. (Freie Elektronen mit sichtbar starrer Bewegung).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}\left\{\frac{du_1}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_1-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_1-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\}+\frac{1}{c}u_0\vartheta_1,\ \ldots,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{du_2}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}u_2-\frac{\partial u_0}{\partial y}v_2-\frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\},\ \ldots,\\
&\frac{d\vartheta_1}{dt}=0\,,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0\,.
\end{aligned}\right| \qquad (16)$$

3. Fall. (Elektrisch neutrale, sichtbar starre Körper).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_1}{\partial x}A+\frac{\partial u_1}{\partial y}B+\frac{\partial u_1}{\partial z}C-\frac{\partial A}{\partial x}u_1-\frac{\partial A}{\partial y}v_1-\frac{\partial A}{\partial z}w_1\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{c}u_x,\ \ldots,\\
&\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=-\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}A+\frac{\partial u_2}{\partial y}B+\frac{\partial u_2}{\partial z}C-\frac{\partial A}{\partial x}u_2-\frac{\partial A}{\partial y}v_2-\frac{\partial A}{\partial z}w_2\right\},\ldots,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0\,.
\end{aligned}\right| \qquad (17)$$

[1] c wird eine sehr große Geschwindigkeit vorstellen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der elektromagnetischen Optik.

Dabei sind

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \alpha\theta_1 , \\ u_y &= \beta\theta_1 , \\ u_z &= \gamma\theta_1 \end{aligned}\right\} \quad (17a)$$

zu setzen und als die Strömungsgeschwindigkeiten in Leitern zu bezeichnen; unter

$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ u_2,\ v_2,\ w_2$$

sind hier die Mittelwerte dieser Funktionen in kleinen Räumen zu verstehen, für welche die Mittelwerte der θ_1 null sind. Es ist zu beachten, daß trotz des Verschwindens der Mittelwerte der θ_1 die Mittelwerte der

$$\alpha\theta_1,\ \beta\theta_1,\ \gamma\theta_1$$

im allgemeinen nicht verschwinden, da ja zu jedem $-(\alpha, \beta, \gamma)$ das entsprechende $(-\theta_1)$ zugehört.

Bei Anwendung gewisser Vorsicht können wir, wie in der Lorentzschen Theorie, den Fall (2) als den grundlegenden Fall betrachten, aus dem alle übrigen konstruiert werden können, wir haben nur zu beachten, daß wir es bei der Anwendung auf Leiter mit den Mittelwerten der Funktionen

$u_0, v_0, w_0;\ u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2;\ u_0\theta_1,\ v_0\theta_1,\ w_0\theta_1$

zu tun haben und die Gleichungen nur auf diese Mittelwerte anwenden dürfen, sonst würden die Funktionen

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \ldots$$

im allgemeinen nicht zu vernachlässigen sein.

Bei Anwendung dieser Vorsicht können wir also die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\bar{d}u_1}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x}u_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_0}{\partial y}v_1 - \frac{\partial u_0}{\partial z}w_1\right\} + \frac{1}{c}u_0\theta_1, \ldots, \\ &\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\bar{d}u_2}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x}u_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u_0}{\partial y}v_2 - \frac{\partial u_0}{\partial z}w_2\right\}, \ldots, \\ &\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

als die grundlegenden Gleichungen des elektromagnetischen Feldes bezeichnen.

(Eingegangen 27. Juni 1917.)

Über eine in metallisch leitenden Kristallen zu erwartende elektrische Nachwirkung.

Von T. Heurlinger.

Nach den Gleichungen, welche die bekannten galvano- und thermomagnetischen Erscheinungen beschreiben, sollen homogene und isotrope metallische Leiter in einem Magnetfeld einen Wechselstrom-Gleichstromeffekt und eine elektrische Nachwirkung zeigen[1]). Die Übereinstimmung zwischen den berechneten Effekten und den in Wismut, Antimon und Tellur[2]) beobachteten Effekten legt die Vermutung nahe, daß die scheinbare Ausnahmestellung, welche diese Elemente hinsichtlich der Elektrizitätsleitung einnehmen, nur in den exzeptionell hohen Werten ihrer galvano- und thermomagnetischen Effekte begründet ist. Drähte aus den erwähnten Elementen zeigen allerdings auch ohne Magnetfeld Nachwirkungserscheinungen, aber wie es scheint, nur wenn das Material nicht quasiisotrop und homogen ist. Zur Entscheidung der Frage, ob diese Erscheinungen sich auf bekannte Eigenschaften der Kristalle zurückführen lassen, empfiehlt sich die Untersuchung von möglichst homogenen Kristallen. Bei der Deutung solcher Versuche können vielleicht die folgenden Bemerkungen nützlich sein.

Es scheint, plausibel anzunehmen, daß eine Elektrizitäts- und Wärmeströmung, welche in elektrodynamischer Hinsicht als stationär betrachtet werden kann, den folgenden Gleichungen genügt:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A_{11}j_{x1} + A_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} , \\ Y_1 &= A_{11}j_{y1} + A_{12}\frac{\partial u}{\partial y_1} , \\ Z_1 &= A'_{11}j_{z1} + A'_{12}\frac{\partial u}{\partial z_1} , \end{aligned}\right\} \quad (1_1)$$

$$\left.\begin{aligned} W_{x_1} &= A_{21}j_{x1} + A_{22}\frac{\partial u}{\partial x_1} , \\ W_{y_1} &= A_{21}j_{y1} + A_{22}\frac{\partial u}{\partial y_1} , \\ Wz_1 &= A'_{21}j_{z1} + A'_{22}\frac{\partial u}{\partial z_1} , \end{aligned}\right\} \quad (2_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= 0 , \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= 0 , \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 , \quad (4)$$

$$Dc\frac{\partial u}{\partial t} = Xj_x + Yj_y + Zj_z - \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial Wz}{\partial z}\right). \quad (5)$$

1) T. Heurlinger, diese Zeitschr. 17, 221, 1916. (Druckfehlerberichtigung: S. 222, Zeile 8 und 9 sind a_{11} und a_{12}" vertauscht.)

2) Bei den zwei letzten Elementen war ein Vergleich

Hier bedeuten: u die Temperatur (relativ zur Umgebung), D die Dichte, c die spezifische Wärme, $A_{11} \dots A_{22}$, $A_{11}' \dots A_{22}'$ Funktionen der absoluten Temperatur, X, Y, Z, j_x, j_y, j_z, W_x, W_y, W_z bzw. $X_1, \dots W_{z1}$ die Komponenten der elektrischen Feldstärke, der elektrischen Stromdichte und der Wärmestromdichte längs den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems von beliebiger Orientierung bzw. des Hauptkoordinatensystems. (1_1) und (2_1) entsprechen den Symmetrieverhältnissen bei Kristallen welche eine 2-zählige und senkrecht dazu eine 3-, 4-, oder 6-zählige Symmetrieachse haben[1]). Wird das Koordinatensystem x, y, z definiert durch die Richtungskosinus

	x	y	z
x_1	$-\sin\varphi$,	$\cos\varphi$,	o
y_1	o ,	o ,	1
z_1	$\cos\varphi$,	$\sin\varphi$,	o

so wird ersichtlich:

$$\left.\begin{aligned} X &= a_{11} j_x + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{11} j_y + b_{12} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ Y &= a'_{11} j_y + a'_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{11} j_x + b_{12} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Z &= A_{11} j_z + A_{12} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} W_x &= a_{21} j_x + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{21} j_y + b_{22} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ W_y &= a'_{21} j_y + a'_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{21} j_x + b_{22} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ W_z &= A_{21} j_z + A_{22} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= A'_{ij} \cos^2\varphi + A_{ij} \sin^2\varphi, \\ a'_{ij} &= A_{ij} \cos^2\varphi + A'_{ij} \sin^2\varphi, \\ b_{ij} &= (A'_{ij} - A_{ij}) \cos\varphi \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad i, j = 1, 2.$$

Es kann angenommen werden, daß an der Oberfläche

$$j_n = 0, \quad (6)$$
$$W_n = hu, \quad (7)$$

wo n die nach außen gezogene Normale und h eine von der Orientierung des Oberflächenelements unabhängige Temperaturfunktion bedeutet.

Die Gleichungen (1)—(7) sind den Gleichungen sehr ähnlich, welche für isotrope Körper im Magnetfelde gelten, und wenn man die Temperaturabhängigkeit von h und den andern Koeffizienten vernachlässigt, können sie in derselben Weise behandelt werden. Eine Komplikation liegt aber darin, daß gewisse vereinfachende Voraussetzungen über die Koeffizienten hier nur in roher Annäherung zutreffen.

Wir stellen uns jetzt vor, daß die Endflächen eines zylindrischen Kristallstabes mit einer Stromquelle verbunden werden, die nach dem Erreichen des stationären Zustandes ausgeschaltet wird. Auch wenn dafür gesorgt wird, daß der Temperaturgradient in der Längsrichtung zu vernachlässigen ist, herrscht im stationären Zustand im allgemeinen ein transversaler Temperaturgradient[1]). Dieser, welcher nach dem Ausschalten der Stromquelle allmählich ausgeglichen wird, bedingt eine abklingende elektrische Feldstärke in der Längsrichtung. Diese Nachwirkung kann mittels der Gleichungen (1)—(7) berechnet werden. Unter der Voraussetzung, daß die Abweichung von der Isotropie klein ist, und daß die äußere Wärmeleitung im Vergleich mit der inneren vernachlässigt werden kann, ergibt sich für einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt bei kleiner primärer Feldstärke annähernd:

$$X^{(0)} = -\frac{b_{12} b_{21}}{A_{22} a_{11}} X = \quad (8)$$
$$-\frac{1}{4} \frac{(A_{12} - A'_{12})(A_{21} - A'_{21})}{A_{22} (A'_{11} \cos^2\varphi + A_{11} \sin^2\varphi)} \sin^2 2\varphi \cdot X,$$

$$X^{(t)} = X^{(0)} \sum_1^\infty (n) \frac{2}{\lambda_n^2 - 1} e^{-\frac{A_{22} \lambda^2 n}{D c R^2} t}. \quad (9)$$

Hier bedeuten: X die primäre Feldstärke, $X^{(t)}$ die x-Komponente der elektrischen Feldstärke zur Zeit t nach dem Ausschalten der Stromquelle, φ den Winkel zwischen Hauptachse und Längsrichtung, R den Radius des Querschnittes und λ_n die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = 0$$

wo $J_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung bedeutet.

$-A_{22}$ und $-A'_{22}$ (deren Unterschied vernachlässigt wurde) sind die Werte der Wärmeleitfähigkeit von Kristallstäben senkrecht und parallel zur Hauptachse, A_{11} und A'_{11} sind die entsprechenden Werte des spezifischen Widerstandes. Die Koeffizienten der thermoelektrischen Kraft und der Peltierwärme, $e_{\perp\parallel}$ bzw. $\Pi_{\perp\parallel}$, für die Kombination zweier Stäbe senkrecht und parallel zur Hauptachse kann man in ähnlicher Weise berechnen, wie es Lorentz für isotrope Körper getan hat. Da das von der Übergangsschicht stammende Glied aus energetischen Gründen hier fortfallen muß, ergibt sich:

$$e_{\perp\parallel} = A_{12} - A'_{12}, \quad \Pi_{\perp\parallel} = A_{21} - A'_{21}.$$

Die Vorzeichen sind so gewählt, daß e_{AB}

zwischen Theorie und Messung nur in sehr beschränktem Maße möglich.

1) Vgl. W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, S. 313.

1) Hierauf hat zuerst W. Thomson hingewiesen.

positiv ist, wenn der thermoelektrische Strom in der kälteren Lötstelle von A nach B fließt, und daß Π_{AB} positiv ist, wenn ein Strom von A nach B die Lötstelle erwärmt.

Zur Schätzung der Größenordnung der in Wismutkristallen zu erwartenden Nachwirkung berechnen wir X^0/X aus (8) für $\varphi = 45^0$. Mit den von G. Borelius und A. E. Lindh[1]) gefundenen Werten für $e_{\perp 11}$, A_{11} und A'_{11}, dem Werte $e_{\perp\parallel} \cdot T$ für $\Pi_{\perp\parallel}$ und dem Tabellenwerte für A_{22} ergibt sich bei Zimmertemperatur $X^0/X = +\,1 \cdot 10^{-2}$, was dem Vorzeichen und der Größenordnung nach mit dem im Wismut beobachteten Effekt übereinstimmt[2]). Eine eingehende Vergleichung zwischen Theorie und Messung wird wahrscheinlich von anderer Seite in Zusammenhang mit einer experimentellen Untersuchung vorgenommen.

1) G. Borelius und A. E. Lindh, Ann. d. Phys. 51, 607, 1916.

2) Dies Resultat wurde in einem Vortrag vor der Versammlung skandinavischer Naturforscher in Kristiania im Juli 1916 mitgeteilt.

Lund, Juni 1917.

(Eingegangen 26. Juni 1917.)

Bisherige Elektrodynamik und das Interferenz-Prinzip.

Von K. Uller.

Wenn man glaubt einen zeitlich veränderlichen Naturvorgang in einem Mittel durch Gleichungen richtig dargestellt zu haben, so muß man prüfen, wie nach ihnen die aus einem Quellgebiet auslaufenden Störungen beschaffen sind, also wie eine Welle gebaut ist; denn die Grundgleichungen der Theorie geben stets den allgemeinen Fall der gegenseitigen Durchkreuzung beliebig vieler Wellen. Es genügt also nicht, die Grundgleichungen, denen oft hypothetische Elemente beigemischt sind, aufzustellen, man muß auch in ihnen allemal das Interferenzprinzip zur Geltung bringen und nachschauen, ob dasselbe nicht falsche Bestandteile der Theorie an die Oberfläche bringt.

Wir wollen das nun einmal an bisherigen Theorien des elektromagnetischen Feldes durchführen.

Es bezeichne: $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit eines Körperelementes gegenüber dem Bezugssystem, λ seine elektrische Leitfähigkeit, $\mathfrak{F}_e$ bzw. $\mathfrak{F}_m$ die Kraft auf einen mit dem Körperpunkt bewegten elektrischen bzw. magnetischen Einheitspol, $\mathfrak{D}_e$ bzw. $\mathfrak{D}_m$ die elektrische und magnetische Erregung sowie V eine universelle Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit. Dann lauten die üblichen Grundformeln

$$\frac{\partial' \mathfrak{D}_e}{\partial t} + \lambda \mathfrak{F}_e = V \operatorname{rot} \mathfrak{F}_m \qquad (I)$$

$$\frac{\partial' \mathfrak{D}_m}{\partial t} = -V \operatorname{rot} \mathfrak{F}_e \qquad (II)$$

mit $\partial' \mathfrak{D}/\partial t = \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{D} - \operatorname{rot}[\mathfrak{u}\mathfrak{D}]$.

Wir setzen im folgenden homogene und isotrope Körper voraus, in denen elektrische und magnetische Dichten nicht existieren, in welchen also ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{D}_e = 0; \quad \operatorname{div} \mathfrak{D}_m = 0. \qquad (III)\ (IV)$$

Die verschiedenen bisher aufgestellten theoretischen Versuche unterscheiden sich nur hinsichtlich der Verknüpfungsgleichungen zwischen den Erregungen und den Kräften.

A. Die Cohnsche Theorie setzt

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon \mathfrak{F}_e - \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_m] \qquad (V)$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu \mathfrak{F}_m + \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \mathfrak{F}_e]; \qquad (VI)$$

ε und μ sind der elektrische und der magnetische Erregungskoeffizient für den Körper, ε_0 und μ_0 die für das Vakuum. Diese Theorie mitumfaßt ihre Vorläuferin, die Hertzsche, wenn wir für jene die zweiten Glieder in V und VI streichen, also formal $\varepsilon_0 \mu_0$ durch 0 ersetzen.

Aus den Gl. I bis VI gewinnen wir nun folgendes System:

$$\varepsilon \dot{\mathfrak{F}}_e - \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_m] + \lambda \dot{\mathfrak{F}}_e = V \operatorname{rot} \{\dot{\mathfrak{F}}_m + \varepsilon / V \cdot [\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_e]\}; \qquad (1)$$

$$\mu \dot{\mathfrak{F}}_m + \varepsilon_0 \mu_0 / V \cdot [\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_e] = -V \operatorname{rot} \{\dot{\mathfrak{F}}_e - \mu / V \cdot [\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_m]\}. \qquad (2)$$

Wir beschränken uns jetzt auf: $\mathfrak{u} = \text{const}$, setzen also ein System aneinanderstoßender Körper mit gemeinsamer und konstanter Geschwindigkeit voraus, und weiter: $\mathfrak{u}^2/V^2$ gegen 1 vernachlässigbar, wodurch $\mathfrak{u}$ nur mehr linear auftreten kann. Dann verlangen III und IV an V und VI mit Hilfe von (1) und (2)

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{F}}_e + \varepsilon_0 \mu_0 / V^2 \cdot (\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{F}}_e + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_e) = 0 \qquad (3)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathfrak{F}}_m + \varepsilon_0 \mu_0 / V^2 \cdot (\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_m) = 0. \qquad (4)$$

Da $\varepsilon/V \cdot [\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{F}}_e + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_e] = [\mathfrak{u}, \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{F}}_m]$ gesetzt werden darf, liefert die nach der Zeit t differentierte Gl. (2) in Verbindung mit (1)

$$\ddot{\mathfrak{F}}_m + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} [\mathfrak{u} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{F}}_m] + \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} - 1\right) \operatorname{rot}[\mathfrak{u} \dot{\mathfrak{F}}_m] + \frac{V^2}{\varepsilon \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{F}_m - \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{rot}[\mathfrak{u} \mathfrak{F}_m] + \frac{\lambda}{\varepsilon} \dot{\mathfrak{F}}_m + \frac{V}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot}[\mathfrak{u} \mathfrak{F}_e] = .$$

Um in dieser Gleichung noch das letzte Glied umzuformen, multipliziere man sie einerseits mit λ/ε, andererseits differentiere man sie nochmals nach der Zeit. Beide abgeleiteten addiert er-

geben die Wellengleichung für die magnetische Kraft:

$$\dddot{\mathfrak{H}}_m + 2\frac{\lambda}{\varepsilon}\ddot{\mathfrak{H}}_m + \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\dot{\mathfrak{H}}_m + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,\ddot{\mathfrak{H}}_m] + \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathfrak{H}}_m] + \left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} - 1\right)\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,\ddot{\mathfrak{H}}_m] + \frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} - 2\right)\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{H}}_m] - \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_m] \quad (5)$$
$$+ \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\mathrm{rot\,rot}\,\dot{\mathfrak{H}}_m + \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{V^2}{\varepsilon\mu}\mathrm{rot\,rot}\,\mathfrak{H}_m + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\mathrm{rot\,rot}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}_m] = 0.$$

Auf entsprechendem Wege gelangen wir zu der Wellengleichung für die elektrische Kraft

$$\dddot{\mathfrak{E}}_e + \frac{\lambda}{\varepsilon}\ddot{\mathfrak{E}}_e + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\mathrm{rot\,rot}\,\dot{\mathfrak{E}}_e + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,\ddot{\mathfrak{E}}_e] + \left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} - 1\right)\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,\ddot{\mathfrak{E}}_e] + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\mathrm{rot\,rot}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}_e] = 0. \quad (6)$$

Sind die Störungen insbesondere von elementarer Schwingungsform, also

$$\mathfrak{E}_e = {}^1/_2\,(F_e \cdot e^{i\nu t} + F_e^* \cdot e^{-i\nu^* t})$$

und

$$\mathfrak{H}_m = {}^1/_2\,(F_m \cdot e^{i\nu t} + F_m^* \cdot e^{-i\nu^* t}),$$

so gehen die Wellengleichungen über in

$$\nu a F_m - \nu\,\mathrm{rot\,rot}\,F_m + i\,c_m\,\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,F_m] - i\,b[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,F_m] + i\,(a-b)\,\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,F_m] = 0. \quad (7)$$

$$\nu a F_e - \nu\,\mathrm{rot\,rot}\,F_e + i\,\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,F_e] - i\,b[\mathfrak{u}\,\mathrm{rot}\,F_e] + i\,(a-b+c_e)\,\mathrm{rot}[\mathfrak{u}\,F_e] = 0, \quad (8)$$

mit Benutzung der Abkürzungen

$$a = \nu^2\frac{\varepsilon\mu}{V^2}(1 - i\lambda/\varepsilon\nu); \quad b = \nu^2\frac{\varepsilon_0\mu_0}{V^2}$$
$$c_e = \nu^2\frac{\varepsilon\mu}{V^2}\cdot\frac{i\lambda}{\varepsilon\nu}; \quad c_m = \frac{1}{1 - i\lambda/\varepsilon\nu} \quad (9)$$

und die Nebenbedingungen (3) und (4) werden

$$\mathrm{div}\,F_m + i\nu\varepsilon_0\mu_0 V^2\cdot(\mathfrak{u}\,F_m) = 0 \quad (10)$$

$$\mathrm{div}\,F_e + i\nu\varepsilon_0\mu_0 V^2\cdot(1 - i\lambda/\varepsilon\nu)(\mathfrak{u}\,F_e) = 0. \quad (11)$$

In den komplexen Vektoren F_e und F_m ist je ein Faktor willkürlich, der die Wahl des N.-P. der Zeitzählung offen läßt. Die Bedingungen für die F beziehen sich auf einen Wellenzustand, d. h. auf die Gesamtheit beliebig vieler sich kreuzender Wellen. Daher setzt sich F im allgemeinen aus einer Summe von Gliedern $\mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi}$ additiv zusammen. Falls der Wellenzustand nur aus einer Welle besteht, lassen die Bedingungen außer dem vorhin genannten Faktor in F noch einen Faktor willkürlich: die Intensität der Welle. Sie spielt aber bei Betrachtungen über den Wellenbau keine Rolle. In einer gegebenen Welle ist also bei gewählter Zeitepoche F gegeben. Somit ist in dem Ansatz

$$F = \mathfrak{f}\cdot e^{i\Phi} \quad (12)$$

für eine Welle eine skalare Ortsfunktion willkürlich. Diese Willkürlichkeit geht natürlich auch in alle Bedingungen ein, die F zu erfüllen hat. Sie kann aber nicht bestehen bleiben, wenn der Ansatz, wie vorausgesetzt, eine Welle wiedergeben soll. Denn da nichts im Wege stünde, die Willkürlichkeit in Φ hinein zu verlegen, könnte man nicht von Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge als von bestimmten kinematischen Größen, die von ν und Φ abhängig sind, reden. Es muß also ein entscheidendes Prinzip walten, und das ist der von mir gefundene Satz[1]), daß Φ vom Betrage von $\mathfrak{f}$ unabhängig sei. Man kann auch von der Erfahrung ausgehen, daß Wellen sich nicht zu einer Welle vereinigen lassen, und aus dieser Tatsache der Interferenz den oben genannten Satz herleiten[2]).

Mit dem Ansatz (12) verwandeln sich die Bedingungen (7) bis (11) in

$$c_m\nu(\mathfrak{f}_e\mathfrak{w}_e) - b(\mathfrak{f}_e\mathfrak{u}) + \Pi_e = 0 \quad (13)$$
$$\Xi_e\mathfrak{f}_e + \eta_e\mathfrak{w}_e + \zeta_e\mathfrak{u} + \Sigma_e = 0 \quad (14)$$

mit

$$\Xi_e = \{\nu + (\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e)\}(a - \mathfrak{w}_e^2) - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e) + \Xi_e$$
$$\eta_e = \{\nu + (\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e)\}(\mathfrak{f}_e\mathfrak{w}_e) - b(\mathfrak{f}_e\mathfrak{u}) + H_e$$
$$\zeta_e = (a - b + c_e)(\mathfrak{f}_e\mathfrak{w}_e) + Z_e$$

sowie

$$\nu(\mathfrak{f}_m\mathfrak{w}_m) - b(\mathfrak{f}_m\mathfrak{u}) + \Pi_m = 0 \quad (15)$$
$$\Xi_m\mathfrak{f}_m + \eta_m\mathfrak{w}_m + \zeta_m\mathfrak{u} + \Sigma_m = 0 \quad (16)$$

mit

$$\Xi_m = \{\nu + c_m(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m)\}(a - \mathfrak{w}_m^2) - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m) + \Xi_m$$
$$\eta_m = \{\nu + c_m(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m)\}(\mathfrak{f}_m\mathfrak{w}_m) - b(\mathfrak{f}_m\mathfrak{u}) + H_m$$
$$\zeta_m = (a - b)(\mathfrak{f}_m\mathfrak{w}_m) + Z_m.$$

Dabei sind die Ortsfunktionen $\Pi\,\Sigma\,\Xi\,\Pi\,Z$ derart von den Ableitungen der $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{w}$ abhängig, daß sie zugleich mit diesen verschwinden.

Das Interferenzprinzip, daß wir nun zur Geltung bringen müssen, verlangt, daß $\mathfrak{w}_e$ unabhängig sei vom Betrage von $\mathfrak{f}_e$, und entsprechend $\mathfrak{w}_m$ unabhängig von $\mathfrak{f}_m$. Demnach muß sein

$$H_e = 0;\ \Xi_e = 0;\ \eta_e = 0;\ \zeta_e\mathfrak{u} + \Sigma_e = b \quad (17)$$
$$H_m = 0;\ \Xi_m = 0;\ \eta_m = 0;\ \zeta_m\mathfrak{u} + \Sigma_m = 0. \quad (18)$$

Es genügt für unsere Zwecke, wenn wir uns fernerhin nur mit der Planwelle ($\mathfrak{f} = \mathrm{const}$; $\mathfrak{w} = \mathrm{const}$) befassen; da ist die hinsichtlich $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ umkehrbare Welle. Dann verschwinden die Ortsfunktionen $\Pi\,\Sigma\,\Xi\,\Pi\,Z$, dann geht (17b) über in (19)

$$\{\nu + (\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e)\}(a - \mathfrak{w}_e^2) - (2a - 2b + c_e)(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_e) = 0,$$

Gl. (17d) verlangt

1) K. Uller, Grundlegung II § 5, diese Zeitschr. 17, 610, 1916.

2) K. Uller, Das Interferenzprinzip, ebenda 18, 101, 1917.

$$(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{w}_e) = 0 \qquad (20)$$

und somit schließlich Gl. (17c)

$$b\,(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{u}) = 0\,, \qquad (21)$$

womit auch die Nebenbedingung (13) befriedigt ist.

Entsprechend finden wir in der magnetischen Welle

$$(p + c_m(\mathfrak{u}\mathfrak{w}_m)),\,(a - \mathfrak{w}_m^2)$$
$$-(2a - 2b + c_e)\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}_m) = 0 \qquad (22)$$

$$(\mathfrak{f}_m \mathfrak{w}_m) = 0 \qquad (23)$$

und

$$b\,(\mathfrak{f}_m \mathfrak{u}) = 0\,. \qquad (24)$$

Diese sechs Bedingungen, insbesondere (21) und (24), bleiben auch für $c_e = 0$; $c_m = 1$, also für konservative Körper bestehen. Ja, selbst im Vakuum, für das außerdem noch $a = b$ ist, gelten sie, wobei (19) und (22) übergehen in $\mathfrak{w}_e^2 = \mathfrak{w}_m^2 = a$. Dort sollen wir freilich auch $\mathfrak{u} = 0$ setzen.

B. Die Lorentzsche Theorie sowie die von Minkowski führen, wenn man sich auf Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{u}/V$ beschränkt, ebenfalls auf Verknüpfungen von den Formen V und VI, also letzten Endes wiederum auf die Bedingungen (19) bis (24).

In den Lösungen der Bedingungen (21) und (24) unterscheiden sich aber die Theorien, wenn wir nicht bloß die Vorgänge im Vakuum darstellen wollen. In der Theorie von Hertz ist b durch 0 zu ersetzen; sie läßt also, wie zu erwarten war, die Orientierung der elektrischen Kraft $\mathfrak{F}_e$ und der magnetischen Kraft $\mathfrak{F}_m$ gegen die Richtung der Körpergeschwindigkeit frei. Anders die anderen Theorien. In diesen verlangt das Interferenzprinzip

$$(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{u}) = 0 \qquad (21')$$

und

$$(\mathfrak{f}_m \mathfrak{u}) = 0\,. \qquad (24')$$

Es verlangt also in diesen, daß stets $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$ senkrecht zur Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ stehen, womit eine Energiestrōmung nur parallel zu $\mathfrak{u}$ verbunden wäre, während für einen mitbewegten Beobachter das elektrische und magnetische Feld sowie die Strahlung an eine Orientierung nachweislich nicht gebunden sind. Wir sind daher genötigt, die Grundgleichungen dieser Theorien abzulehnen, wenn $\mathfrak{u}$ auch nur um das geringste von Null verschieden ist!

Die Schwere dieses Urteils treibt uns an, noch einen anderen Gedankenweg zu beschreiten. Wenn wir von vornherein die Wellengleichungen und Nebenbedingungen für F_e und F_m für eine Planwelle zurecht machen, kommen wir hinsichtlich F_e zu

$$c_m\, p\,(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{w}_e) - b\,(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{u}) = 0 \qquad (13')$$

$$\xi_e\, \mathfrak{f}_e + \eta_e\, \mathfrak{w}_e + \zeta_e\, \mathfrak{u} = 0 \qquad (14')$$

mit Ausdrücken für $\xi_e\, \eta_e\, \zeta_e$, die aus denen unter (14) hervorgehen, wenn man $\Xi_e\, H_e\, Z_e$ verschwinden läßt. Jetzt ist von vornherein $\mathfrak{w}$ unabhängig vom Betrage von $\mathfrak{f}$. Man sieht, daß bei der Planwelle das Interferenzprinzip von vornherein erfüllt ist, daß mit ihm aus dieser idealisierten und vereinfachten Welle heraus keine Folgerungen für die Wellenkinematik sich ziehen lassen. Wir müssen also durch neue, eigens angepaßte Überlegungen zu ermitteln suchen, unter welchen Bedingungen die Wellengleichung (14′) bestehen kann. Zunächst ist klar, daß wenn $\xi\, \eta\, \zeta$ alle drei von Null verschieden sind, $(\mathfrak{f}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0$ sein muß; anderenfalls müßte wenigstens einer dieser drei Koeffizienten verschwinden. Dann aber müßten die zu den beiden anderen gehörigen Vektoren einander parallel sein. Man findet, daß das in den drei möglichen Kombinationen zu Folgerungen führt, die absurd sind. Es bleibt also sowohl für die elektrische als auch für die magnetische Welle nur die Alternative: entweder $(\mathfrak{f}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0$ und die $\xi\, \eta\, \zeta \neq 0$ oder $\xi = 0 = \eta = \zeta$ und $(\mathfrak{f}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) \neq 0$. Die erste Möglichkeit würde verlangen, daß $\mathfrak{F}_e$, und entsprechend $\mathfrak{F}_m$, nur in einer Ebene rotieren könne, welche die Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ enthielte, Beschränkungen in der Orientierung der elektrischen und magnetischen Kraft, die der mitbewegte Beobachter nicht kennt. Ferner würde sie uns die einzige Möglichkeit entwinden, das Quadrat des Wellennormalenpaares zu bestimmen. Das ist aber eine unbedingt zu erfüllende Forderung. Es genügt daran zu erinnern, daß Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge ohne das unbestimmt blieben. Wir kommen so für die Planwelle auch auf diesem gänzlich verschiedenen Wege zu dem notwendigen Schluß, daß nur die zweite Möglichkeit der Alternative in Frage kommen kann. Diese aber ist identisch mit derjenigen, die mit Hilfe des Interferenzprinzips aus der allgemeinen Form der Wellen oben erschlossen worden ist.

Das nun zweimal gewonnene, auffallende Ergebnis veranlaßt uns einmal nachzuforschen, was sich vielleicht direkt aus den Grundgleichungen in dieser Hinsicht folgern läßt.

Da finden wir, daß bei Divergenzbildung aus I mit der Voraussetzung III hervorgeht: $\lambda\, \mathrm{div}\, \mathfrak{F}_e = 0$. Sowie der Körper auch nur eine Spur von Leitfähigkeit hat, muß nach allen Theorien $\mathrm{div}\, \mathfrak{F}_e$ verschwinden, also mit Ausnahme der Hertzschen gemäß (3)

$$(\mathfrak{u}\, \mathfrak{F}_e) = 0 = (\mathfrak{u}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{F}_m)$$

sein. Ohne Interferenzprinzip werden wir somit für $\lambda \neq 0$ bei Planwellen auf die Forderungen: $(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{w}_e) = 0$; $(\mathfrak{f}_e\, \mathfrak{u}) = 0 = (\mathfrak{f}_m\, [\mathfrak{w}_m\, \mathfrak{u}])$ geführt, Forderungen, die schon sonderbar sind, da nach

ihnen in einer einfachen Welle, die durch einen wellenlöschenden Körper läuft, stets die elektrische Kraft nur geradlinig schwingen könne, und zwar senkrecht zur Wellennormale und gleichzeitig senkrecht zur Körpergeschwindigkeit.

Das Interferenzprinzip nun aber verlangt nicht nur diese Bedingungen auch für konservative Körper, sondern fügt ihnen noch weitere hinzu, nämlich $(\mathfrak{f}_m \mathfrak{w}_m) = 0$; $(\mathfrak{f}_m \mathfrak{u}) = 0 = (\mathfrak{f}_e [\mathfrak{w}_e \mathfrak{u}])$. Alle diese zusammen, je drei für $\mathfrak{f}_e$ und $\mathfrak{f}_m$, sind aber nur in dem Unterfall erfüllbar, daß eine einfache Welle parallel der Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ sich fortpflanzt.

B'. Angesichts dieser Sachlage wollen wir, um nichts ungeprüft zu lassen, die Bedingungen aufsuchen, die das Interferenzprinzip den elektrischen und magnetischen Feldstärken, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$, auferlegt. Diese Unterscheidungen kennen die Theorien von Hertz und Cohn nicht, wohl aber die übrigen, die sich aber auch wieder untereinander unterscheiden. Die Theorie von Lorentz hat, wenn wir der Einfachheit halber ε_0 und μ_0 gleich eins setzen,

$$\mathfrak{F}_e = \mathfrak{E} + \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(VII)}$$

$$\mathfrak{F}_m = \mathfrak{M} - \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}] \qquad \text{(VIII)}$$

und

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon\,\mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(IX)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu\,\mathfrak{M} - (\mu - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}]. \qquad \text{(X)}$$

Man kommt damit, wenn man sich wieder auf Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{u}/V$ beschränkt, auf Wellengleichungen und Nebenbedingungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$, die formal den Cohnschen für $\mathfrak{F}_4$ und $\mathfrak{F}_m$ gleichen, also schließlich auch wieder zu Beziehungen, die denen unter (19) bis (24) gleichen.

Die Minkowskische Theorie setzt:

$$\mathfrak{F}_e = \mathfrak{E} + \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}_m] \qquad \text{(XI)}$$

$$\mathfrak{F}_m = \mathfrak{M} - \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{D}_e] \qquad \text{(XII)}$$

und

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon\,\mathfrak{F}_e - \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(XIII)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu\,\mathfrak{M} + \frac{1}{V}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}], \qquad \text{(XIV)}$$

so daß bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $\mathfrak{u}/V$

$$\mathfrak{D}_e = \varepsilon\,\mathfrak{E} + (\varepsilon\mu - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] \qquad \text{(XV)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \mu\,\mathfrak{M} - (\varepsilon\mu - 1)/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}] \qquad \text{(XVI)}$$

wird. Wir kommen damit unter den Voraussetzungen III und IV zu

$$\dot{\mathfrak{D}}_e + \lambda\,\{\mathfrak{E} + \mu/V \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}]\} = V \operatorname{rot} \mathfrak{M} \qquad (25)$$

$$\mathfrak{D}_m = -V \operatorname{rot} \mathfrak{E} \qquad (26)$$

und weiter zu den Wellengleichungen und Nebenbedingungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$

$$\ddot{\mathfrak{E}} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu}\{[\mathfrak{u} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{E}}] + \operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{E}}]\} - \frac{\lambda}{\varepsilon}[\mathfrak{u} \operatorname{rot} \mathfrak{E}] = 0 \qquad (27)$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{V^2}(\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{E}} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{E}) = 0 \qquad (28)$$

$$\ddot{\mathfrak{M}} + \frac{\lambda}{\varepsilon}\dot{\mathfrak{M}} + \frac{V^2}{\varepsilon\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{M} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu} \times \qquad (29)$$

$$\{[\mathfrak{u} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{M}}] + \operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{M}}]\} - \frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{M}] = 0$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{M} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{V^2}(\mathfrak{u}\,\dot{\mathfrak{M}}) = 0. \qquad (30)$$

Für Störungen von elementarer Schwingungsform gehen sie über in

$$\operatorname{div} E - (1 - i\lambda/\varepsilon\nu)\, ivb\,(\mathfrak{u}\,E) = 0 \qquad (31)$$

$$aE - \operatorname{rot}\operatorname{rot} E + ivb\,\{\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,E] + [\mathfrak{u} \operatorname{rot} E]\} + c[\mathfrak{u} \operatorname{rot} E] = 0, \qquad (32)$$

$$\operatorname{div} M - ivb\,(\mathfrak{u}\,M) = 0, \qquad (33)$$

$$aM - \operatorname{rot}\operatorname{rot} M + ivb\,\{\operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,M] + [\mathfrak{u} \operatorname{rot} M]\} + c \operatorname{rot}[\mathfrak{u}\,M] = 0, \qquad (34)$$

mit den Abkürzungen

$$a = \nu^2 \frac{\varepsilon\mu}{V^2}(1 - i\lambda/\varepsilon\nu);\; b = \frac{\varepsilon\mu - 1}{V^2};\; c = \frac{\lambda\mu}{V^2}. \qquad (35)$$

Für Planwellen insbesondere wird hieraus:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) + (1 - i\lambda/\varepsilon\nu)\, vb\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{u}) = 0, \qquad (36)$$

$$\{a - \mathfrak{w}^2 - (2vb - ic)(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w})\}\,\mathfrak{e} + \{(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) + (vb - ic)(\mathfrak{e}\,\mathfrak{u})\}\,\mathfrak{w} + vb\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{u} = 0, \qquad (37)$$

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) + vb\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{u}) = 0, \qquad (38)$$

$$\{a - \mathfrak{w}^2 - (2vb - ic)(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w})\}\,\mathfrak{m} + \{(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) + vb\,(\mathfrak{m}\,\mathfrak{u})\}\,\mathfrak{w} + (vb - ic)(\mathfrak{m}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{u} = 0. \qquad (39)$$

Das Interferenzprinzip verlangt nun

$$a - \mathfrak{w}^2 - (2vb - ic)(\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}) = 0; \qquad (40)$$

folglich auch, wenn nicht gerade das Vakuum ($b = 0$; $c = 0$) durchlaufen wird,

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) = 0; \quad (\mathfrak{m}\,\mathfrak{w}) = 0 \qquad (41)\ (42)$$

und weiter

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{u}) = 0; \quad (\mathfrak{m}\,\mathfrak{u}) = 0, \qquad (43)\ (44)$$

was alles auch in konservativen Körpern ($c = 0$) gilt. Die beiden letzten Beziehungen ziehen noch gemäß (25) und (26)

$$(\mathfrak{m}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0 \qquad (45)$$

und

$$(\mathfrak{e}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}]) = 0 \qquad (46)$$

nach sich. Schon ohne das Interferenzprinzip verlangt Gl. (25) wegen III, wenn wir von ihr die Divergenz nehmen, allemal wenn $\lambda \neq 0$ ist,

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \mu/V \cdot (\mathfrak{u} \operatorname{rot} \mathfrak{M}) = \varepsilon\mu/V^2 (\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{E}} + \lambda/\varepsilon\,\mathfrak{E}),$$

was in Hinblick auf (28) verlangt $(\mathfrak{u}\,\mathfrak{E}) = 0 = (\mathfrak{u} \operatorname{rot} \mathfrak{M})$ und also auch $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$.

Wir gelangen somit hinsichtlich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ zu ganz demselben Tatsachenbestand wie oben für $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$, was ja auch zu erwarten war und nur den Wert einer Nachprüfung auf anderem Wege hat. Die Grundgleichungen verlangen, sobald Leitfähigkeit vorhanden ist:

$$(e\,w) = 0\,;\quad (e\,u) = 0 = (m\,[w\,u]).$$

Das Interferenzprinzip verlangt nicht nur diese Bedingungen auch für konservative Körper, sondern gesellt ihnen noch die drei weiteren hinzu: $(m\,w) = 0$; $(m\,u) = 0 = (e\,[w\,u])$, sechs Forderungen, die nur für $[w\,u] = 0$ erfüllbar sind.

Wir können jetzt unsere kritische Untersuchung schließen. Das Ergebnis lautet: Die auf die Hertzsche folgenden bisherigen Theorien vermögen leider nicht elektromagnetische Wellen in bewegten Körpern darzustellen, nicht einmal in erster Ordnung der Körpergeschwindigkeit. — Die Hertzsche Theorie tritt nicht in Widerspruch zum Interferenzprinzip.

Von Fizeau[1]) stammt ein experimenteller Versuch über den Einfluß der Erdbewegung auf die Drehung der Polarisationsebene eines polarisierten Lichtbündels, das einen Glasplattensatz schräg durchsetzt. Er fand eine Drehung, wenn das Licht zuerst parallel und dann antiparallel zur Erdbewegung lief. Dieser Versuch verdient, wie schon Herr Lorentz erkannt hat, in hohem Maße unsere Beachtung. Der gefundene Effekt ist nämlich, wie eine eingehende Erörterung lehrt[2]), unerklärlich für die bisherigen Theorien; nach ihrem Beweisgange dürfte keiner auftreten. Im Lichte unserer Untersuchung gewinnt er neue Bedeutung: Er kann, falls er reell ist, eine experimentelle Bestätigung unseres vorstehenden Ergebnisses in sich bergen.

Erwähnenswert ist auch noch folgendes. In ruhenden Körpern lauten gemäß den Maxwellschen Feldgleichungen die Wellengleichungen für $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$ bekanntlich

$$\ddot{\mathfrak{F}}_e + \lambda/\varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{F}}_e + V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\,\mathfrak{F}_e = 0$$
$$\ddot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{F}}_m + V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\,\mathfrak{F}_m = 0\,.$$

Statt dessen bekommen wir aus den Wellengleichungen (5) und (6) für $u = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\ddot{\mathfrak{F}}_e + \lambda/\varepsilon \cdot \dot{\mathfrak{F}}_e + V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\,\mathfrak{F}_e\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_m\right) + \lambda/\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_m\right)$$
$$+ V^2/\varepsilon\mu \cdot \text{rot rot}\left(\dot{\mathfrak{F}}_m + \lambda/\varepsilon \cdot \mathfrak{F}_m\right) = 0\,.$$

Wenn diese auch aus jenen ableitbar sind, so ist es doch auffällig, daß bei Leitfähigkeit des Körpers die zweite so zusammengesetzt auftritt.

C. Statt wie bisher die Welle vom ruhenden Bezugssystem Σ aus zu betrachten, können wir diese auch von einem in den Körpern festen Bezugssystem Σ' aus ins Auge fassen. Dann verläuft sie in für uns ruhenden Körpern. Sind beide Bezugssysteme hinsichtlich der Beschreibung und Messung des Vorgangs völlig gleichberechtigt und soll das Relativitätsprinzip von Einstein gelten, dann müssen wir, wenn die Maxwellschen Gleichungen den Vorgang in Σ' richtig beschreiben, auf Grund derselben und durch Übergang zu Σ mittels der Lorentz-Transformationen zu den für den Vorgang in gemeinschaftlich bewegten Körpern gültigen Feldgleichungen gelangen. Und diese fallen bekanntlich mit den Grundformeln (I—VI) zusammen, sofern die gemeinsame Körpergeschwindigkeit u konstant und klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Gesamtheit dieser Grundformeln haben wir aber oben als unhaltbar erwiesen. Es müssen sonach entweder die Maxwellschen Feldgleichungen oder das Einsteinsche Relativitätsprinzip — wenn nicht gar beide — unrichtig sein. Diese Unrichtigkeit wäre im ersteren Falle wohl nur eine Unvollständigkeit, beim Relativitätsprinzip allerdings eine grundsätzliche.

Soll das klassische Relativitätsprinzip gelten, dann hätten wir den Übergang von Σ' zu Σ mit den Galilei-Transformationen zu vollziehen und würden auf die Hertzsche Theorie stoßen, die wie oben erwähnt, nicht dem Interferenzprinzip widerstreitet.

Da man auch diese Theorie aus bekannten Gründen ablehnt, so stehen wir nun leider vor lauter Trümmern und müssen versuchen von neuem aufzubauen.

Bei diesen Feststellungen wollen wir vorläufig stehen bleiben.

Gießen, 17. April 1917.

(Eingegangen 19. April 1917.)

1) Fizeau (Pogg. Ann. **114**, S. 554, 1861).

2) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie usw. (Leiden 1895, S. 125—131.) Siehe die Bemerkung desselben Forschers in der Math. Enzyklopädie V, **14**. 267, 1904.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Zur Physik des millionstel Zentimeters[1]).

Von F. Ehrenhaft.

Mit Tafel X.

1. Teil: Die Konstitution der Elektrizität.

Die Ehre, in Ihrem Kreise zu sprechen, will ich in Anspruch nehmen, um Einiges aus dem Gebiete der physikalischen Erscheinungen, welche an Materieteilchen der Größenordnung 10^{-4}—10^{-6} cm zur Beobachtung gelangen, zusammenzufassen und um Ihnen auch Neues aus diesem Gebiete zu berichten. Ich will heute im speziellen zwei kleine getrennte Teilgebiete behandeln und mit einzelnen Probekörpern vorerwähnter Größenordnung zwei Dinge untersuchen.

1. Die Frage über die Natur der Elektrizität, die Frage, ob wir überhaupt die Möglichkeit haben, eine jeder Kritik standhaltende Entscheidung zu fällen, ob die Elektrizität atomistisch konstituiert ist oder nicht, und wenn diese Frage nicht beantwortet werden kann, will ich Folgerungen nach der einen Seite hin erwähnen, welche jeder Kritik standhalten; damit will ich diese Fragen zu einem gewissen Abschlusse bringen.

2. Will ich die Kräfte, welche die Strahlung auf die Materie überträgt, mit einzelnen Probekörpern verschiedenen Materials (verschiedener chemischer Elemente) oder mit sich physikalisch verschieden verhaltenden Probekörpern untersuchen und so die Erforschung neuer Eigenschaften der Strahlung (des Lichtes) und der Materie sowie insbesondere auch beider in ihrer Wechselwirkung beginnen.

Als Operationsfeld wähle ich den gaserfüllten Raum, weil unsere Kenntnis über die Konstitution der Gase weit vorgeschrittener ist, als die der Flüssigkeiten und festen Körper.

Als Versuchsobjekte (Probekörper), aus welchen wir später quantitative Schlüsse ziehen wollen, wählen wir exakt kugelförmige Objekte des Silbers, Quecksilbers, Goldes usw., verdampft im galvanischen Lichtbogen in reinem trockenem Stickstoff oder Argongase, ferner Kugeln des Schwefels, Selens usw., hergestellt durch Verdampfung in der Eprouvette in reinstem trockenstem Argongas. Diese Probekörper habe ich auf eine Glasplatte niedergeschlagen und will hier ihre Mikrophotographie in winkel- und flächengetreuer Abbildung zeigen. Solche Abbildungen sind für vorerwähnte Materiearten in meinen Abhandlungen zu finden; für Schwefel füge ich diesem Vortrage die Photographien 1 u. 2 (Taf. X) bei. Man erhält scharf kugelförmige Abbildungen der im Immersionsöl direkt eingebetteten Probekörper; die vollkommene Kugelform ist nach Helmholtz und Abbe durch Verwendung von Objektiven mit numerischen Aperturen 1·3 mit homogener Immersion bis zu Partikeln mit dem Radius 6—$7 \cdot 10^{-6}$ cm garantiert. Mit noch kleineren Probekörpern wollen wir zunächst nicht operieren. An solchen Kügelchen Metalles erkennen wir den metallischen Glanz der Oberfläche, wir sehen im Mikroskope direkt, daß diese Körperchen sich der Beschaffenheit des Materials nach durch nichts von der kompakten Masse unterscheiden.

An einem solchen Probekörper wollen wir die Kräfte messen, welche seine Bewegung im Gase einleiten.

Jede solche Bewegung erfolgt im Gasraume von Atmosphärendruck oder im evakuierten Raume unter Einfluß einer konstanten Kraft mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Die zur Messung gelangende und allen Schlüssen zugrunde liegende Geschwindigkeit eines Probekörpers ist also die stationär gewordene gleichförmige Endgeschwindigkeit, welche dieser bei der Bewegung im widerstehenden Mittel unter dem Einfluß der konstanten auf ihn einwirkenden Kraft angenommen hat. Diese Geschwindigkeit des Probekörpers ergibt sich der auf ihn wirkenden äußeren Kraft proportional. Die Zeit bis zur Erreichung dieser Endgeschwindigkeit fällt unter jede meßbare Größe.

Man erhält so den ersten Ansatz über die Messung der Kräfte und deren Vergleich; denn da die treibende Kraft der Geschwindigkeit proportional ist, kann die Bestimmung dieser Kraft auf die einfachste physikalische Messung, die Messung einer gleichförmigen Geschwindigkeit zurückgeführt werden. Die Kraft ist also durch die Gleichung

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{v}}{B}$$

gegeben, worin B die Beweglichkeit, die Geschwindigkeit, welche das Kügelchen bei der treibenden Kraft $\mathfrak{P} = 1$ erreicht, bedeutet.

Die obige einfache Beziehung ist die Basis aller unserer Erörterungen, denn sie gibt die Möglichkeit, verschiedenartige Kräfte, die auf die Materie angreifen, zu messen.

Die Definition der Beweglichkeit B ergibt sich der Theorie nach aus dem bekannten Stokes-Cunninghamschen Gesetze zu

1) Vortrag, veranstaltet vom phys.-math. Seminar der Universität zu Göttingen.

$$B = \frac{1}{6\pi\mu a}\left(1 + A\frac{l}{a}\right).$$

hierin bedeutet μ den Koeffizienten der inneren Reibung des Gases, a den Kugelradius des Teilchens, l die mittlere Weglänge der Molekeln des reibenden Gases und A eine Konstante (0.815).

Mechanische Versuche von Mc. Keehan, Knudsen, S. Weber u. a. ergeben die Richtigkeit obiger Beziehung, zu welcher nur dann noch eine geringfügige Korrektur zu treten hat, wenn die mittlere Weglänge l sehr groß ist gegen den Radius des Kügelchens.

Nunmehr erfordert die Bestimmung der Größe des Probekörpers nichts mehr als die Messung seiner gleichförmigen Fallgeschwindigkeit $\mathfrak{V}_f$. In diesem Falle ist nämlich die treibende Kraft $\mathfrak{P}$ das Gewicht des Kügelchens $m \cdot g$; dann ergibt sich aus

$$\mathfrak{V}_f = mg\,B = \frac{4a^3\pi}{3} s g B$$

die Größe des Kügelchens, worin s das spezifische Gewicht des Probekörpers und g die Schwerebeschleunigung bedeutet.

Bevor wir auf diese Größenbestimmung weitgehende Schlüsse aufbauen, will ich untersuchen, ob dieser Zusammenhang von Fallgeschwindigkeit und Größe bei kugelförmigen Probekörpern bestimmten Materials verläßlich ist und dazu einfache Beziehungen aus anderen Bereichen der Physik heranziehen. Im ganzen werde ich drei verschiedene Methoden zur Größenbestimmung der Probekörper erörtern, die alle ausgezeichnet übereinstimmen; deren zweite will ich jetzt sofort anschließen, die dritte kann ich erst am Schlusse des Vortrags klarlegen.

Der erste Blick ins Dunkelfeld im Gase — solche Probekörper werden bekanntlich mit dem Mikroskop senkrecht zur Richtung der sie beleuchtenden Strahlen beobachtet (Siedentopf-Zsigmondy) — lehrt uns, daß die Partikelchen in verschiedenen Farben erscheinen und daß bei allen bisher untersuchten Substanzen (Gold, Silber, Quecksilber, Schwefel, Selen) die Kügelchen um so langsamer fallen, in je kurzwelligerem Lichte sie im Dunkelfelde erglänzen. Der Zusammenhang zwischen der Farbe des von den Kügelchen abgebeugten Lichtes und ihrer Fallgeschwindigkeit ist in die Augen springend. Ordnen wir hier beispielsweise die Silber- und Schwefelkügelchen in den Tabellen I und II nach zunehmender Fallgeschwindigkeit, $\mathfrak{V}_f$ (Kolonnen 2) dann ordnen sich diesen Fallgeschwindigkeiten die Farben der Probekörper eindeutig in der Stufenleiter der Spektralfarben von kürzeren zu längeren Wellen zu (Kolonnen 3). Ein Probekörper definierten Materials und von einer gewissen Farbe hat also eine ganz bestimmte Größe und umgekehrt entspricht jeder Kugelgröße dieses Materials eine ganz bestimmte Wellenlänge des von dem Probekörper in das Mikroskop abgebeugten Lichtes.

Wir nehmen nun die am Einzelteilchen in Gasen beobachteten Farben als neue Grundlage zur Größenbestimmung dieser einzelnen Probekörper. Auf Grund der allgemeinen Erörterungen von Mie und Debye kann man aus der Beugung des Lichtes an einer Kugel die Intensitätsverteilung des der von einer Kugel bestimmter Größe und bestimmten Materials (charakterisiert durch den Brechungsexponenten, bzw. beim Metalle durch den komplexen Brechungsexponenten als Funktion der Wellenlänge) senkrecht zur Richtung der die Kugel beleuchtenden Strahlen zerstreuten Lichtes als Funktion der Wellenlänge berechnen. Die Intensitätsverteilung ergibt für eine Kugel vom Radius a und definierter optischer Beschaffenheit die Farbe des Lichtes, das selektiv von dieser Kugel abgebeugt wird. Diese mühsamen Berechnungen haben wir für Gold, Silber, Quecksilber, Schwefel usw. im Gase durchgeführt.

So kann man dann aber auch umgekehrt aus der beobachteten Farbe die Größe der Kügelchen erschließen.

Tabelle I.

Silber in Stickstoff.

No.	Fallgeschw. $\mathfrak{V}_f \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	Farbe	Radien $\cdot 10^6$ cm berechnet aus Fallgeschw.	aus Farbe	Ladung $\varepsilon \cdot 10^{10}$ elektst. E.	$\mathfrak{V}_L \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P} = \mathfrak{V}_L B \cdot 10^{12}$ Dyne
				6	— 1,58	2,11	10,65	19,82
1	1,23	gelbgrün	6,45		+ 1,12	4,07	8,83	52,90
22	1,47	gelb	7,28		+ 3,29	4,52	8,28	61,80
15	1,57	"	7,60	8—9	— 4,70	11,24	7,66	146,60
14	1,69	"	8,00		+ 6,83	11,73	6,51	180,00
16	1,99	"	8,91		— 1,12	18,15	5,62	323,00
17	2,32	"	9,86		+ 1,16	11,68	5,47	213,80
19	2,33	gelb-orange	10,04	9—10	— 14,46	12,55	5,46	220,80
18	2,39	"	10,09		+ 13,30	7,33	4,06	180,60
21	3,32	orange	12,38	11—13	— 2,79	7,08	3,57	198,30
4	3,86	"	13,59					

Tabelle II.
Schwefel in Argon.

No.	Fallgeschw. $\mathfrak{B}_f \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	beobachtete Farbe	Radien $\cdot 10^6$ cm berechnet aus Fallgeschw.	Farbe	$e \cdot 10^{10}$ elektst. E.	$\mathfrak{B}_L \cdot 10^3 \frac{cm}{sec}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{B}_L}{B} \cdot 10^{12}$ Dyne
42	0.33	blau	9.42	8.0—10	+ 0.42	0.66	4.79	13.75
32	0.42	grün	11.02	10—12	— 0.76	0.88	3.82	23.05
27	0.49	„	12.16			0.94	3.32	28.30
21	0.59	grüngelb	13.65	12—13	+ 0.84	1.50	2.82	53.20
34	0.67	gelb	14.77	13—15	— 0.85	1.52	2.54	59.80
14	1.06	orange	19.43		+ 1.14	1.70	1.76	96.50
10	1.08	„	19.64	15—19	— 4.65	1.86	1.74	107.00
70	1.16	„	20.50			1.87	1.64	114.10
11	1.19	„	20.80		+ 0.67	2.01	1.62	125.00
4	1.24	weiß	21.30		+ 0.98	2.21	1.55	142.60
16	1.32	„	22.12		+ 8.30	2.27	1.49	152.40
22	1.46	„	23.42		17.30	2.23	1.38	161.00
20	1.46	„	23.42			2.31	1.38	167.40
7	1.97	„	27.77		— 2.04	2.20	1.12	195.50
31	2.13	„	29.02		— 2.51	1.85	1.06	174.50
26	2.31	„	30.14		+ 6.44	1.36	1.00	136.00
40	3.44	„	37.92		— 6.05	0.72	0.77	93.50

Wenn man die Kolonnen 4 und 5 der Tabellen I und II vergleicht, ersieht man, daß die aus den Widerstandsgesetzen erschlossenen Kugelgrößen mit jenen übereinstimmen, welche die Beugungstheorie des Lichtes nach den Farben, in welchen die Probekörper im Dunkelfelde erscheinen, erwarten läßt. Die Farben eines Probekörpers bestimmten Materials ergeben also die Möglichkeit einer einfachen Größenbestimmung auf submikroskopischem Gebiete, sie setzen die mikroskopische Messung im submikroskopischen Gebiete gleichsam fort.

Es sei noch bemerkt, daß der einheitliche Zusammenhang zwischen Fallgeschwindigkeit und Farbe die Einheitlichkeit der Dichte aller Probekörper eines Materials erweist. In den Berechnungen der Kugelgrößen aus der Fallgeschwindigkeit ist die Dichte der kompakten Masse vorausgesetzt; die Berechnungen aus der Farbe enthalten eine solche Voraussetzung nicht, sondern fußen nur auf den optischen Materialkonstanten, welche man den optischen Messungen an großen Stücken solchen Materials entnimmt. Die Übereinstimmung der beiden auf völlig anderen Grundlagen ruhenden Meßmethoden rechtfertigt diese Annahmen.

Die Fallgeschwindigkeit hat den Radius des Probekörpers mit Hilfe der Stokes-Cunninghamschen Formel für die Beweglichkeit richtig ergeben; bei gegebenem Radius ist somit durch die Stokes-Cunninghamsche Formel die Beweglichkeit des Probekörpers und damit die Messung der Kräfte, die auf das Partikel angreifen, gesichert.

Geht man von der Farbe aus, dann kennt man den Radius. Man kann also beispielsweise das Gewicht $m \cdot g$ des Probekörpers rechnen und mit dem Gewicht alle übrigen Kräfte, welche auf den Probekörper angreifen, vergleichen. Die Übereinstimmung der nach beiden Methoden erschlossenen Radien des Probekörpers verbürgt, daß die Kräftemessung nach beiden Methoden gesicherte Resultate ergibt.

Eine aus der Übereinstimmung der Resultate beider Meßmethoden sich bestätigende weitere Tatsache ist, daß Probekörper bestimmten Materials der Größen um 10^{-5} bis 10^{-6} cm im Gase bei gleicher Farbe gleiche Beweglichkeit besitzen.

Die Frage nach der Konstitution der Elektrizität.

Damit ist das Rüstzeug geschaffen, um auf die beiden Programmpunkte einzugehen. Wir bringen also einen Probekörper in ein homogenes vertikales elektrostatisches Feld. Die auf einen einzelnen derartigen Probekörper in diesem Felde ausgeübte Kraft $\mathfrak{P}_e$ ist wie im makroskopischen Felde einem Produkte $e\mathfrak{E}$ zweier von einander unabhängiger Größen gleichzusetzen, deren einer Faktor die Feldstärke, deren anderer der skalare Ladungszustand des Probekörpers ist.

Um die Bestimmung von e handelt es sich; sie erfolgt durch Vergleich mit dem uns bekannten Gewichte des Probekörpers mit den elektrischen Kräften, welche der Schwere entgegen wirken mögen. Überwiegt das Gewicht, dann fällt das Kügelchen

$$mg > e_1 \mathfrak{E}_1 .$$

Das Gewicht ist größer als das Produkt der Ladung des Kügelchens in die Feldstärke. Ändern wir nun die Feldstärke bis zu dem Be-

trage $\mathfrak{E}^s_1$, bei der das Kügelchen im Felde steigt, dann folgt

$$mg < e_1 \mathfrak{E}^s_1 .$$

Durch die Bestimmung derartiger Felder ist die Ladung zwischen zwei Grenzen eingeengt.

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^s_1} < e_1 < \frac{mg}{\mathfrak{E}^f_1}.$$

Dies Verfahren der Einengung kann beliebig oft wiederholt werden.

Aus den stets gleichbleibenden Grenzspannungen ergibt sich die Stabilität der Ladung.

Ich möchte, bevor ich auf die Diskussion der Ladungen näher eingehe, hier einiger mir interessant erscheinender Punkte Erwähnung tun, welche über den Ladungszustand solcher Probekörper in Gasen zunächst qualitativ aufklären.

In reinstem trockenem Argongase durch Verdampfung hergestellte Quecksilber-, Schwefel- oder Selenkügelchen sind vollkommen ungeladen und bleiben es auch bei Belichtung mit Strahlen unserer Wellenlänge; es ist dies daran erkenntlich, daß sie durch das elektrische Feld in ihrer gleichförmigen Fallgeschwindigkeit nicht beeinflußt werden. Im galvanischen Lichtbogen verdampfte Edelmetalle, auch Quecksilber, zeigen positive oder negative Ladung. Phosphornebel in atmosphärischer Luft und andere Nebel, welche unter Begleitung von chemischen Reaktionen entstehen, zeigen ebenfalls Ladungen beiderlei Sinnes.

Ungeladene Probekörper können aufgeladen, geladene umgeladen werden, wenn das Gas durch ein Mittel leitfähig gemacht (ionisiert) wird und der Probekörper ein leitfähig gemachtes Bereich des Gases zu einer Zeit passiert, zu der kein elektrisches Feld wirksam ist. Die jeweilige Ladung behält der Probekörper wieder stabil bis zur Durchführung einer nächsten Umladung bei; spontane Umladungen sind außerordentlich selten und sofort bemerkbar.

Der Statistik sehr vieler Messungen entspringt die Erkenntnis, daß alle Werte der Ladungen, sowohl positive wie negative, vorkommen, sowohl an metallischen Probekörpern wie an Öl und an Dielektrizis. Es gibt also keine bevorzugten Ladungen, die der Natur der Elektrizität entspringen. Dies trifft sowohl bei direkt durch Verdampfung im Lichtbogen hergestellten Kügelchen als auch bei zunächst ungeladenen und sodann durch Ionisierung aufgeladenen Kügelchen zu.

Es erübrigt jetzt, einige Angaben über solche elektrische Ladungen zu machen, die an einzelnen Probekörpern beobachtbar sind. Tabelle III enthält z. B. Zahlenwerte kleiner Ladungen, welche die Probekörper von jeweils angegebenem Radius nach ihrer Erzeugung oder ihrer Aufladung trugen.

Tabelle III.

Einige direkt gemessene Ladungen.

Autor	Substanz	Radius. 10^6 cm	Ladung . 10^{10} e. st. E.
Ehrenhaft	*Hg*	8.41	0.28
	Ag	7.28	1.15
	Au	10.33	2.51
Konstantinowsky	*Hg*	3.60	0.20
	Au	3.70	0.07
Parankiewicz	Öl	36.36	2.41
	Schwefel	8.70	0.24
	Selen	6.93	0.16

Es kann also ein unteilbares Elektrizitätsatom (elementares Quantum) in der von der Theorie statuierten Größenordnung um $4 - 5 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. nicht konstatiert werden, denn an den einzelnen Probekörpern läßt sich noch der 100. Teil der sogenannten elementaren Ladung ohne Schwierigkeit nachweisen.

Dieses Resultat führt zur weitern Fragestellung, ob ein Atom der Elektrizität überhaupt existiere und ob wir diese Frage überhaupt entscheiden können. Dazu wollen wir ein und denselben Probekörper vom Gewichte $m \cdot g$ mehrmals so umladen, daß er hintereinander die Ladungen $e_1\ e_2\ e_3 \ldots e_i\ e_k$ annimmt. Ich erörtere hier ein Verfahren, das Konstantinowsky in seinen Abhandlungen und insbesondere auch in der Diskussion mit anderen Physikern zur vollen Entwicklung und Klarheit gebracht hat.

Jede dieser Ladungen wird nach dem besprochenen Verfahren eingeengt. Man erhält zur Bestimmung dieser Ladungen ein System von Ungleichungen.

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^s_1} < e_1 < \frac{mg}{\mathfrak{E}^f_1}$$

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^s_2} < e_2 < \frac{mg}{\mathfrak{E}^f_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^s_i} < e_i < \frac{mg}{\mathfrak{E}^f_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}^s_k} < e_k < \frac{mg}{\mathfrak{E}^f_k}.$$

Entweder ist die Elektrizität nicht atomistisch, dann sind alle meine Erörterungen überflüssig oder die Elektrizität ist atomistisch, das heißt es wären die Ladungen e_1, e_2, e_i, e_k aus lauter gleichen Elementarladungen ε aufgebaut. Dann müßten die Ladungen als Vielfache dieser

Elementarladung ε aufgefunden werden. Es muß also sein

$$e_1 = n_1\varepsilon, \quad e_2 = n_2\varepsilon, \quad e_i = n_i\varepsilon, \quad e_k = n_k\varepsilon$$

worin $n_1\ n_2\ \ldots$ ganze Zahlen bedeuten. Es ist also das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen zu suchen. Wir bilden die Quotienten der Ladungen

$$\frac{e_i}{e_k} = \frac{n_i}{n_k}.$$

Es folgt dann für die Verhältnisse der Vielfachheiten eine Serie von Ungleichungen von der Form

$$\frac{\mathfrak{E}_k'}{\mathfrak{E}_i'} < \frac{n_i}{n_k} < \frac{\mathfrak{E}_k''}{\mathfrak{E}_i''}.$$

Die Grenzen

$$\alpha_1 < \frac{n_1}{n_2} < \beta_1 \qquad \alpha_i < \frac{n_i}{n_{i+1}} < \beta_i,$$
$$\alpha_2 < \frac{n_2}{n_3} < \beta_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

durch welche diese Verhältnisse eingeengt werden, enthalten das Gewicht mg nicht mehr; sie sind also von einer speziellen Kräftemessung (z. B. der Gewichtsbestimmung) unabhängig. Diesem Gabelverfahren der Bestimmung der Vielfachheit der Ladungen haften keine unbekannten Versuchsfehler an. Denn die beiden Grenzspannungen, welche die Fall- bzw. Steigbewegung des Probekörpers einleiten sind exakt meßbar und müssen die Schwebespannung umschließen. Würde man z. B. die Ladung aus der Schwebespannung, bei der $mg = e\mathfrak{E}$ ist, bestimmen wollen, oder durch bloße Messung von Steiggeschwindigkeit (Millikan) des Probekörpers, dann ist der so erhaltene Wert der Ladung mit den unvermeidlichen Versuchsfehlern behaftet, die schwer exakt einzuschätzen sind. Wenn man aber das vorerörterte Gabelverfahren einschlägt, dann müssen die richtigen Werte der Ladungen bzw. die richtigen Verhältnisse der Vielfachheit dazwischenliegen.

Damit ist das Problem der Atomistik der Elektrizität auf eine elementare Aufgabe der Zahlentheorie zurückgeführt; denn es handelt sich nur mehr um die Bestimmung der fortlaufenden Proportion der n, welche obigen Ungleichungen genügt. Für die Verhältnisse gibt es nun unendlich viele Verhältnisse ganzer Zahlen, welche obigen Ungleichungen genügen; doch gibt es nur eine Gruppe von kleinsten ganzen Zahlen unter diesen; das heißt, man kann sich die gemessenen Ladungen auf verschiedene Weise aus elementaren Quanten zusammengesetzt denken. Doch ist bei der Anzahl und Genauigkeit der Versuche nur eine größte Ladung, dem kleinsten n entsprechend, das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen als Elementarquant denkbar. Jede größere Ladung als dieses ε würde, als Elementarladung angenommen, den Versuchen widersprechen. Aus einer Reihe von solchen Versuchen bleibt also die Existenzmöglichkeit von kleineren Ladungen als dieses ε noch offen; es kann jedoch mit apodiktischer Gewißheit ein positiver Schluß dahin gezogen werden, daß ein eventuelles elementares Quant nicht oberhalb dieser Ladungen liegen kann.

Es ist also klar, daß das Einengungsverfahren nicht zur Erforschung der prinzipiellen Frage dienen kann, ob die Elektrizität überhaupt atomistisch ist oder nicht; es kann aber auf diesem Wege erschlossen werden, ob die Vielfachheiten, die man in den Verhältniszahlen der experimentell aufgefundenen elektrostatischen Ladungen 10^{-9} bis 10^{-11} e. st. E. erblickte, Verhältnisse ganzer Zahlen sind, die in einer Atomistik begründet sind, oder ob diese Zahlenverhältnisse rein arithmetischer Natur sind, aus dem Rechnungsverfahren hervorgehen und gar nichts mit den grundlegenden Fragen über die Natur der Elektrizität, über das Elektrizitätsatom, zu tun haben. Der Gang solcher Versuche kann klarer Weise zweierlei zutage fördern:

1. Entweder werden bei genauer Einengung immer präziser dieselben einfachen ganzen Zahlen umschlossen; und allen so erschlossenen Vielfachen n entsprechen stets auch die gleichen ε, dann ist eine Atomistik der Elektrizität in dieser Größenordnung wahrscheinlich.

2. Wenn genauere Einengung immer größere ganze Zahlen n und daher auch kleinere ε erfordern, so ist eine Atomistik in der Größenordnung ε ausgeschlossen; sie existiert dann entweder gar nicht, oder sie liegt in einer viel tieferen Größenordnung.

Welcher dieser beiden Fälle vorliegt, will ich an zwei typischen Beispielen auseinandersetzen, die ich den Versuchen einer Arbeit entnehme, welche in dieser Hinsicht klare Entscheidung brachte[1]). Sie wurde ausgeführt an Ölkügelchen jener Größenordnung, an welcher Millikan und Regener eine Atomistik der Elektrizität zu konstruieren versucht hatten.

An einem solchen Kügelchen von der Größe $a = 79{,}3 \cdot 10^{-6}$ cm wurde zunächst durch Messung einer Serie von Steiggeschwindigkeiten eine Ladung $e_1 = 48{,}3 \cdot 10^{-10}$, sodann nach der Umladung eine zweite Ladung $e_2 = 17{,}3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. bestimmt. Dies könnte man zunächst in Übereinstimmung mit jener Gruppe von Autoren, welche ein Elektrizitätsatom bei $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. zu finden suchten, im Sinne einer solchen Atomistik der Elektrizität deuten, wenn wir in

1) I. Parankiewicz, Wiener Akademieberichte 1917.

der ersten Ladung ein zehnfaches, in der zweiten ein vierfaches Quant erblicken. Als Atom ergäbe sich bei dieser aproximativen Quantierung

$$\varepsilon = \frac{48{,}3}{10} \cdot 10^{-10} = 4{,}83 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

bzw.

$$\varepsilon = \frac{17{,}3}{4} \cdot 10^{-10} = 4{,}33 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

Über den wichtigsten Punkt dieser aproximativen Quantierung, über die Berechtigung, gerade eine Ladung um $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ als größtes gemeinschaftliches Maß von e_1 und e_2 anzusetzen, erhalten wir aber nicht die geringste Aufklärung.

Zur objektiven Ermittlung der kleinstmöglichen mit den Versuchen verträglichen Zusammensetzungszahlen n für die Ladungen e_1 und e_2 sowie für eine dritte Ladung e_3 wurde gleichzeitig das Gabelverfahren angewandt; aus diesem resultierten für die n nachfolgende Ungleichungen.

$$2{,}743 < \frac{n_1}{n_2} < 2.834$$

$$0{,}456 < \frac{n_1}{n_3} < 0{,}475.$$

Aus diesen Einengungen folgt als einfachstes Verhältnis der drei Zahlen

$$n_1 : n_2 : n_3 = 22 : 8 : 17.$$

Es gibt keine einfacheren ganzen Zahlen, welche den Ungleichungen (Versuchsresultaten) genügen. Jedes einfachere Verhältnis würde insbesondere auch den Ungleichungen von der Form

$$\left.\frac{1}{\mathfrak{E}^s{}_1 n_1}\right| \lessgtr \left|\frac{\varepsilon}{mg}\right| \lessgtr \left|\frac{1}{\mathfrak{E}^s{}_1 n_1}\right.$$

$$\left.\frac{1}{\mathfrak{E}^s{}_2 n_2}\right| \lessgtr \left|\frac{\varepsilon}{mg}\right| \lessgtr \left|\frac{1}{\mathfrak{E}^s{}_2 n_2}\right.$$

$$\left.\frac{1}{\mathfrak{E}^s{}_3 n_3}\right| \lessgtr \left|\frac{\varepsilon}{mg}\right| \lessgtr \left|\frac{1}{\mathfrak{E}^s{}_3 n_3}\right.$$

widersprechen, indem nicht sämtliche Glieder der rechten Seite größer als jene der linken wären.

Damit haben wir gefunden, daß die Ladung $e_1 = 48{,}3$ zumindest ein zweiundzwanzigfaches Quant, die Ladung 17,3 zumindest ein achtfaches Quant gewesen ist. Damit ist aber noch keineswegs ausgesagt, daß $\varepsilon = \frac{48{,}3}{22} \cdot 10^{-10}$ $= 2{,}2 \cdot 10^{-10}$ das Elektrizitätsatom ist; dagegen läßt sich mit apodiktischer Gewißheit behaupten, daß kein größeres ε als Elektron mit den Versuchen in Einklang gebracht werden kann.

Ein zweites Beispiel illustriere die Sachlage noch krasser. An einem Ölkügelchen der Millikanschen Größenordnung (Radius $= 57{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm) ergaben sich hintereinander aus drei Gruppen der Steiggeschwindigkeiten die Ladungen

$$e_1 = 5{,}6 \cdot 10^{-10}, \quad e_2 = 28{,}68 \cdot 10^{-10},$$
$$e_4 = 10{,}82 \cdot 10^{-10}.$$

Man wäre zunächst geneigt, für die Verhältnisse der Ladungen

$e_1 : e_2 : e_4 = 1 : 6 : 2$ zu setzen und demgemäß z. B. in $\frac{e_2}{6} = \frac{28{,}68}{6} \cdot 10^{-10} = 4{,}78 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. auf Promille genau das von der Theorie postulierte Quant zu erblicken. Die Eingrenzungen für die Ladungen e_1, e_2 und e_4 und überdies für eine dritte Ladung e_3, welche bloß eingeengt wurde, gab aber für die Verhältnisse der Vielfachen

$$0{,}1845 < \frac{n_1}{n_2} < 0{,}1975$$

$$2{,}758 < \frac{n_2}{n_3} < 2{,}950$$

$$0{,}935 < \frac{n_1}{n_4} < 0{,}962.$$

Die einfachsten ganzen Zahlen, welche obigen Ungleichungen genügen, sind nun

$$n_1 : n_2 : n_3 : n_4 = 12 : 63 : 22 : 23.$$

Damit ist aber noch keineswegs behauptet, daß

$$\varepsilon = \frac{5{,}6}{12} \cdot 10^{-10} = \frac{28{,}68}{63} \cdot 10^{-10}$$
$$= \frac{10{,}82}{23} \cdot 10^{-10} = 0{,}45 \cdot 10^{-10} \text{ e. st. E.}$$

ein Elementarquantum darstellt. Denn aus den Versuchen läßt sich wieder nur behaupten, daß jedes größere Quant als $0{,}45 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. als Elementarquantum den Versuchen widersprechen würde.

Diese Beispiele genügen vollkommen, um das Wesen der sogenannten „Loi des multiples entiers", welche in der Tatsache, daß sich ganze Zahlen finden lassen, die sich wie die Verhältnisse der Maßzahlen der aufgefundenen elektrischen Ladungen verhalten, einen Beweis der Atomistik der Elektrizität geben sollte, in den Gasen klarzustellen. Die gefundenen größten gemeinschaftlichen Maße der Ladungen sind keine Elementarladungen, sondern sie stellen bloß die größte Ladung dar, aus welchem man sich die Ladungen des Probekörpers den Versuchen entsprechend aufgebaut denken kann.

Die aufgefundenen Ganzzahligkeiten der Größenordnung 10^{-9} bis 10^{-11} e. st. E. sind also nicht in einer Atomistik der Elektrizität begründet, sondern sie tragen rein arithmetischen Charakter und sagen nichts in Hinsicht auf die naturwissenschaftliche Vorstellung über die Elektrizität aus.

Den zuverlässigsten Ausgangspunkt bildet immer möglichst enger Anschluß an die Erfah-

rung; im vorliegenden Falle nahmen wir eine sehr einfache Beobachtung zu Hilfe. Diese zeigte, daß bei enger gezogenen Grenzen der Messung den Versuchsbedingungen nur immer durch größere Zahlen n (Vielfachheiten der Ladung d. h. komplizierterer Zusammensetzung aus eventuell elementaren Quanten) genügt werden kann, so daß die Ladungen ε, aus welchen die Elektrizitätsmengen auf den Probekörpern nach den Versuchen aufgebaut sein könnten, immer kleiner werden.

Dies wichtige Resultat, hier an Ölkügelchen erläutert, stimmt völlig überein mit den Resultaten an Metallkügelchen; die Verhältnisse der Ladungen sind Aproximationen durch kleinste ganze Zahlen, über die Natur der Elektrizität sagen diese aber nichts aus.

Ich will jetzt kurz zusammenfassen. Wir haben die Größe der Probekörper durch drei untereinander übereinstimmende Verfahren (eines bin ich Ihnen noch schuldig) festgestellt und deren Ladungen gemessen. Dabei ist es aber nicht gelungen, an einzelnen Probekörpern das von der Theorie statuierte Quant bei $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. aufzufinden. Dies fanden wir weder an Metallen, noch an Dielektrizis (Öl, Schwefel).

Auch konnten an keinem Probekörper bevorzugte ausgezeichnete Ladungen gefunden werden, welche Aussagen über die Konstitution der Elektrizität gestatten. Das von einigen Autoren zu diesem Zwecke versuchte Verfahren, eine Atomistik der Elektrizität in der von der Theorie statuierten Größenordnung experimentell zu bestätigen, hält einer kritischen Prüfung nicht stand. Denn die Repartition nach erwarteten Quanten ist vollkommen willkürlich; dabei kann aber, wie speziell erneuert an Ölkügelchen gezeigt wurde, durch rechnerische Zerlegung verhältnismäßig großer Ladungen — und solcher bedienten sich die Autoren fast ausschließlich — hohe Präzision eines Nachweises der Atomistik vorgetäuscht werden, ohne daß deshalb auch nur die Spur einer Atomistik zugrunde liegt. Die oft auf Promille des gesuchten und erhofften Resultates erhaltene scheinbare Übereinstimmung ist vielmehr, wie durch kritische Versuche gezeigt wird, eine aus dem Rechenverfahren entspringende, rein arithmetische und hat mit den fundamentalen Fragen über die Elektrizität gar nichts zu tun.

Beinhaltet nun die Konstatierung der Existenz von Ladungen von der Ordnung 10^{-12} e. st. E. eine neue Tatsache? Gewiß nicht; bevor man daran gegangen ist, die als heuristische Arbeitshypothese vielleicht leichtverständliche Elektronentheorie in den Rang einer quantitativen Aussage über die Natur der Dinge zu erheben und dem Elektron Realität in der Natur zuzuschreiben, wäre die Existenz solcher Ladungen wohl von niemandem in Zweifel gezogen worden.

Die vorliegenden Versuche und Beweisführungen gestatten aber bloß folgende Aussagen:

Im Falle des Bestehens einer Atomistik der Elektrizität kann das Elektrizitätsatom (Elementarquantum) nach den bisherigen Erfahrungen bloß durch eine Ladung gebildet werden, welche kleiner ist als $1 \cdot 10^{-12}$ e. st. E. Es ist jedoch als wahrscheinlich anzunehmen, daß weitere Versuche die Existenzmöglichkeit eines derartigen Atoms in einen Bereich noch geringeren Ladungszustandes verweisen. Die aus den Versuchen hervorgehende Aussage mag vielleicht in ihrer Einseitigkeit eigenartig anmuten, und doch ist ihr Inhalt, soweit es die Beobachtung und Versuchsmöglichkeiten gegenwärtig zulassen, für die Beantwortung der Elektronenfrage erschöpfend.

Über das Thema sind bereits ca. 150 Abhandlungen erschienen, von welchen 65 Einwendungen gegen meine Methode, gegen die Versuche und deren Deutung vorzubringen versucht hatten. Doch glaube ich heute mit Sicherheit behaupten zu dürfen, daß bisher ein stichhaltiges Argument weder gegen die Versuche noch auch gegen deren Deutung vorgebracht werden konnte, so daß meine am Königsberger Naturforschertage 1910 und schon früher in der Wiener Akademie der Wissenschaften aufgestellten Behauptungen und Schlußfolgerungen ungeschmälert fortbestehen.

Alle diese vorerwähnten Einwendungen lassen sich in wenige Punkte zusammenfassen; ich will dies im Nachfolgenden tun und gleichzeitig auch an dieser Stelle nochmals den Grund angeben, warum die Einwendungen nicht stichhaltig sein können.

1. Der erste Einwand bezog sich auf die geäußerte Vermutung, daß die metallischen Probekörper unregelmäßige Gestalt und Dichte hätten. Mit diesem Einwande haben sich die Teilnehmer des Kongresses für Radiologie und Elektrizität zu Brüssel im Jahre 1910 beruhigt. Es gibt heute sechs Beweise für die Kugelgestalt der verwendeten Partikel. Ich glaube auf eine weitere Besprechung dieser Frage angesichts der direkten mikroskopischen Abbildung, welche ich Ihnen gezeigt habe und welche die ideale Kugelgestalt sogar noch kleinerer Probekörper, als jene, auf welche meine Schlüsse aufgebaut sind, sicherstellt, verzichten zu dürfen. Dies Resultat ist nicht erstaunlich: denn zur Behauptung, man hätte es bei diesen Probekörpern nicht mit Kugeln zu tun, hielt man sich lediglich aus dem Grunde berechtigt, weil sich die von den Metallkügelchen getragenen Ladungen nicht mit den erwarteten Elementarquanten

identifizieren ließen. Gegen die Einwände mit Bezug auf die Dichte des Kügelchens habe ich bereits Gelegenheit gehabt, auf den Metallglanz der im Mikroskop beobachteten Partikel und auf die Übereinstimmung der mechanistischen und optischen Größenbestimmung hinzuweisen; diese beiden Tatsachen allein entziehen derartigen Einwänden den Boden. Einen weiteren diesbezüglichen Nachweis hat G. Jäger geführt.

2. Als zweiter Einwand wurde vorgebracht, daß die Beobachtung am Einzelteilchen des Silbers die erwarteten Werte für die Ladung des Elektrons ergäbe, wenn man die Beweglichkeit des Probekörpers auf Grund des gemessenen mittleren Verschiebungsquadrates seiner Brownschen Bewegung $\overline{\lambda^2}$ definiere. Denn bekanntlich ergibt sich nach der Einstein-Smoluchowskischen Theorie der Brownschen Bewegung die Beweglichkeit zu

$$B = \frac{N}{2RT}\overline{\lambda^2}.$$

Unter Zugrundelegung dieser Beweglichkeits-Definition folgt nämlich aus den Versuchen ohne Voraussetzungen über die Form und Dichte der Probekörper das Produkt Ne (Loschmidtsche Zahl in die Ladung des Probekörpers).

Auf dem von Solvay einberufenen Quantenkongresse 1911 war die Ansicht vertreten, daß solche Messungen an Silberpartikeln zu Werten des $N \cdot e$ führten, die mit dem elektrochemischen Äquivalente übereinstimmen.

Heute ist es bereits von vielen Autoren klargelegt worden, daß auch nach der Berechnungsart der Brownschen Bewegung sich die Produkte $N \cdot e$ viel kleiner ergeben, als das elektrochemische Äquivalent der Elektrolyse. Die beobachteten Ladungszustände lassen sich nicht auf das Produkt Ne und dessen Multipla $2Ne$, $3Ne$, ... zurückführen, wie dies im Falle des Bestehens des von der Theorie erwarteten Elektronenladungswertes der Fall sein müßte. Auch bei Ölkügelchen ergeben sich die $N \cdot e$ kleiner als das Faraday der Elektrolyse; dies hat F. Zerner auch an Millikans Zahlenmaterial nachgewiesen.

Mit der Tatsache, daß sich an einzelnen Probekörpern in Gasen die $N \cdot e$ kleiner und abweichend vom elektrochemischen Äquivalente ergeben, fällt auch die Brücke, welche die Theorie zwischen den Ionen in Flüssigkeiten und in Gasen zu schlagen versucht hatte.

3. Daß die Schlußweise, es müsse die Konstitution der Elektrizität atomistisch sein, weil sich ganze Zahlen bilden lassen, die sich wie die Ladungen verhalten, die ein Partikel hintereinander annimmt, hinfällig ist, wurde heute bereits in aller Deutlichkeit wieder bewiesen. Daß die Ladungssprünge ε bei allen Partikeln auch gleich würden, haben die Autoren selbst oft nicht einmal behauptet.

4. Schließlich wurde von einem Autor erwähnt, daß Quecksilberkugeln verdampfen oder sich bei der Bewegung am Gase abreiben; daß dies bei den von mir und anderen Autoren ausgeführten Versuchen nicht der Fall ist, erhellt unter anderem aus der erwiesenen Tatsache, daß selbst nach stundenlangen Versuchen an einem Quecksilberkügelchen die Fallgeschwindigkeit desselben Kügelchens ungeändert bleibt (Konstanz der Fallzeit). Wäre das Kügelchen verdampft, so müßten die Fallzeiten länger werden, wie man dies an Wassertröpfchen leicht beobachten kann.

Schließlich wurde die Konstanz der Massen von Quecksilberkügelchen unter den bei den Versuchen obwaltenden Verhältnissen durch direkte Photographie nachgewiesen. Verdampfung des Goldes und anderer fester Substanzen haben die Autoren nicht behauptet.

Andere Argumente sind nicht vorgebracht worden.

Selbstverständlich würde ich gerne nach wie vor jede Deutung der Versuche, welche die Universalität und Realität der von der Theorie postulierten Ladung $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. erhalten ließe, akzeptieren, wofern diese Deutung mit den bei unseren Versuchen aufscheinenden Tatsachen in Einklang gebracht werden kann.

Ich glaube mich jedoch auch in Übereinstimmung mit Ihnen zu befinden, wenn ich weitere Diskussionen auf Grund der nämlichen bereits erörterten und experimentell verfolgten Gegenargumente nicht durch weitere Versuche behandle und weiter auch meiner persönlichen Meinung bescheiden Ausdruck verleihe, daß die von mir angegebene Methode, die ausgeführten Versuche und deren Deutung so hypothesenfrei sind wie keine aller jener indirekten Schlußweisen und Mittelwertsbestimmungen, durch welche man die Universalität eines Elektrizitätsatoms zu statuieren versucht hatte.

Es scheint mir daher, als ob das Dogma der Unteilbarkeit einer elektrischen Ladung und in der Folge die Materialisierung der Elektrizität vorzeitig in die Grundlagen der Naturwissenschaft Eingang gefunden hätte.

2. Teil[1]: Die Kräfte, welche die Strahlung auf die wägbare Materie ausübt.

Ich gehe jetzt zum zweiten Teile meiner

1) Die ausführlichen Abhandlungen, welche in diesem Vortrage zusammengefaßt werden, gelangen, soweit sie noch nicht veröffentlicht sind, in den Wiener Akademieberichten, in den Annalen der Physik und in dieser Zeitschrift zum Abdruck.

Auseinandersetzung über und will die Kräfte näher untersuchen, welche stationäre Strahlung auf die Materie überträgt. Auch hier sind diese kleinen Probekörper von der Größenordnung um 10^{-5} cm Radius verschiedenen Materials zur Untersuchung besonders geeignet, denn bei diesen würde die Strahlung direkte progressive Bewegung im Gasraume einleiten können, weil die Kräfte der Strahlung, im allgemeinen sehr klein zu erwarten sind und nicht durch andere in unseren Beobachtungsräumen stets vorhandene große Kräfte (Gravitation) überdeckt erscheinen. Wir wählen also Probekörper in dieser Größenordnung, weil bei ihnen das Verhältnis der Oberfläche zu ihrem Volumen bereits so groß ist, daß sie durch die vermuteten Kräfte der Strahlung in Bewegung versetzt werden könnten. Bis zu einem gewissen Grade war eine solche experimentelle Möglichkeit schon lange vermutet.

Maxwell deduzierte, konzentriertes elektrisches Licht werde wahrscheinlich einen noch größeren Druck ausüben als die Sonnenstrahlung und es wäre nicht unmöglich, daß die Strahlen eines solchen Lichtes, wenn sie auf ein dünnes metallisches Blättchen, das im Vakuum fein aufgehängt ist, fallen, an diesem einen beobachtbaren mechanischen Effekt ausüben könnten. Theoretische Erwägungen der klassischen Thermodynamik führten Bartoli und Boltzmann dazu, die Existenz des Strahlungsdruckes vorauszusetzen.

Lebedew hat den Maxwellschen Strahlungsdruck bestätigt.

Svante Arrhenius hat die universelle Bedeutung der durch die Strahlung auf kleine Materieteilchen übertragenen Bewegungsgröße für die kosmische Physik erkannt und diese grundlegenden Gedanken zuerst in seinen Studien „Über die Ursachen der Nordlichter" und im „Werden der Welten" niedergelegt.

Schwarzschild schrieb schließlich eine mathematische Studie „Über den Druck des Lichtes auf kleine (die Strahlung absolut reflektierende) Kugeln" welche Debye später auf Kugeln beliebigen Materials erweiterte, und bemerkte einleitend: „Irgendwo in der Welt muß es ja vorkommen, daß ein kleines Teilchen im leeren Raume dem Drucke des Lichtes ausgesetzt ist, und daher ist dem Resultate der Rechnung in jedem Falle die physikalische Anwendbarkeit gewiß."

Gehen wir jetzt zur näheren Erörterung über. Wenn solche Bewegungen einwandfrei nachgewiesen werden, so muß durch die anzustellenden Versuche zunächst aufgeklärt werden, welcher Teil der beobachteten Bewegung des Probekörpers einerseits auf direkte Wirkung der Strahlung zu zählen ist, welche beim Durchstrahlen des absolut leeren Raumes auf den Probekörper auftrifft, und diesen in Bewegung setzt. Solche von der Strahlung auf die ponderable sichtbare Materie ausgeübte und die Bewegung hervorrufende Kräfte, die ohne Mitwirkung des ponderablen Zwischenmediums (Gases), in dem der Probekörper eingebettet ist, auftreten, wollen wir Kräfte erster Art nennen. Ein spezieller Fall wäre z. B. der Maxwellsche Strahlungsdruck.

Anderseits wird es Sache der Versuche sein, aufzuklären, ob und wenn, wieviel von jeder Bewegung auf Rechnung indirekter Wirkung der Strahlen, z. B. in gaserfüllten Räumen, zu setzen ist. Unter diese indirekten Kräfte — Kräfte zweiter Art — wollen wir alles subsummieren, was nicht direkte Einwirkung der Strahlung auf die Materie ist, also in absolut leerem Raume, in dem nur der Probekörper und die Strahlung vorhanden wäre, gar nicht eintreten würde, beispielsweise Radiometerkräfte (Crookes Kräfte) und was Sie sonst noch an Hypothesen diesbezüglich machen wollen. Im absolut leeren Raume müssen also alle Kräfte zweiter Art verschwinden.

Da sich ein absolut leerer Raum weder herstellen läßt, noch mit einem Probekörper vorangedeuteter Größe in einem solchen operiert werden kann, wird es Aufgabe sein, die Untersuchung so zu führen, daß die etwa zur Beobachtung gelangenden Teile der Bewegungen der Probekörper durch bindende Schlußweisen entweder auf Kräfte erster oder Kräfte zweiter Art zurückgeführt werden können.

Der Weg, den ich im folgenden betrete, weicht von all dem Herkömmlichen in dieser Frage ab; denn die Untersuchungsmethode wird von solcher Empfindlichkeit sein, daß Kräfte von der Größenordnung 10^{-11} Dyn und darunter, das sind viele millionenmal kleinere Kräfte als jene, die jemals gemessen wurden, mit Exaktheit zur Messung gelangen werden.

Daher war ich bestrebt, nachfolgende Untersuchungen von vornherein auf eine Basis zu stellen, die zunächst weder vom Lichte einer Theorie erhellt noch getrübt ist, oder durch Versuchsmethoden herkömmlicher Art möglicherweise gelenkt wird.

Die Auseinandersetzungen will ich denn auch mit experimentell Gefundenem beginnen und erst nach Ausführung von Versuchen Gelegenheit suchen, die Resultate mit der Theorie und mit dem Herkömmlichen zu vergleichen.

Wir konzentrieren das Licht einer Bogenlampe durch drei Apochromat-Objektivlinsen in einen Strahl in horizontaler Richtung und senden diesen Strahl durch ein Mikroskopobjektiv mit Apertur 0,3. Der austretende Strahlenkegel ist

mittels dreier Mikrometerschrauben in der Richtung der 3 kartesischen Koordinaten verstellbar. Der Strahl kann gehoben und gesenkt werden, beiderseits seitlich und in die Fortpflanzungsrichtung nach vor- und rückwärts verschoben werden. Ein genau gleich intensiver, ebenso verstellbarer horizontaler Strahl einer zweiten Bogenlampe wird durch eine spiegelbildliche Anordnung in horizontaler Richtung dem ersten Strahle exakt entgegen gerichtet. Durch die erwähnten sechs Mikrometerschrauben ist es bei einiger Übung möglich, daß diese beiden Strahlenbündel exakt koaxial gerichtet werden und einander entgegenlaufend zur Deckung gebracht werden können. Eine automatische Vorrichtung gestattet, zwei photographische Verschlüsse, deren jeder in einem Strahle angebracht ist, so zu schließen, daß zu jedem Zeitpunkte entweder nur Strahl 1 oder nur Strahl 2 wirkt, oder daß die beiden einander entgegenlaufenden Strahlen gleichzeitig wirken. Die horizontal justierten Strahlen passieren ein homogenes vertikales jederzeit kommutierbares und in seiner Stärke regulierbares elektrisches Feld in einem durch nachfolgendes Bild skizzierten horizontal montierten Kondensator.

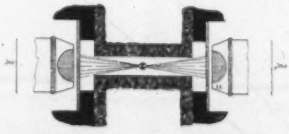


Fig. 1. Kondensator (ca. 2 mal vergrößert) und Beleuchtungsobjektive.

Der Kondensatorraum kann luftdicht abgeschlossen und bis zu beliebig hoher Verdünnung evakuiert werden. Er hat drei Glasfenster für die zwei koaxialen Beleuchtungsobjektive sowie für das senkrecht dazu justierte Objektiv des Beobachtungsmikroskops. Die beleuchtenden Strahlen hatten jeder eine 10 cm dicke Wasserschicht passiert, so daß ultrarote Strahlen fehlen, die Glasbestandteile des Lichtweges absorbieren das ultraviolette Licht; wir haben es also in den Strahlen bloß mit Lichtwellenlängen des Intervalles

$$3{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{cm} < \lambda < 12 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}$$

zu tun. Das Energiemaximum der Bogenlampenstrahlung liegt nach dem Wienschen Verschiebungsgesetze bei

$$\lambda = 7 \cdot 10^{-5}\ \text{cm},$$

also etwa in der Mitte des Intervalles. Der in Fig. 1 im Kondensatorraume eingezeichnete Kreis stellt das im senkrecht zu den beleuchtenden Strahlen justierten Beobachtungsmikroskope zur Abbildung gelangende Gesichtsfeld dar. Photographie 3 der Tafel X stellt das Gesichtsfeld selbst und den Strahl in 100facher Vergrößerung dar. Das Bild des Strahles ist ein Dunkelfeldbild, das ich nach einstündiger Expositionszeit, während welcher ich dichten Rauch durch den Kondensator fließen ließ, erhielt. Ein Teil des netzartigen Okularrasters beträgt $11{,}8 \cdot 10^{-3}$ cm. Ich nehme vorweg, daß die mittlere Energiedichte des Strahles in der Zone seiner engsten Einschnürung (Brennfläche) ca. 330 mal größer ist, als die Energiedichte der unkonzentrierten Sonnenstrahlung über der Erdatmosphäre. Die Energiedichte nimmt natürlich von der Achse des Strahles gegen den Rand zu ab, im Zentrum ist sie ca. 12 mal größer als die mittlere Energiedichte. Die Methode, mit deren Hilfe ich zu diesen Zahlen gelangte und wodurch es mir möglich wurde, die Energiedichtenverteilung in einem Strahle, dessen Durchmesser nur mehr ein hundertstel Zentimeter beträgt, zu messen, werde ich später noch kurz erörtern.

Dieses vorbeschriebene Instrument bildet gleichsam eine Lichtzange. Mit ihm will ich nun die Materie behandeln und beschreibe im folgenden eine Zahl von Versuchen, die ich mit diesem Instrumente an Probekörpern von der Größenordnung $3 \cdot 10^{-5}$ bis $5 \cdot 10^{-6}$ cm Radius ausgeführt habe.

Grundversuch I.

Es sei nur Strahl 1 wirksam, der Strahl 2 durch die Irisblende geschlossen.

Ein Probekörper von bestimmtem Materiale fällt im gaserfüllten Raume mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit herab. Er gerät in den Kegel des intensiven Strahles und wird aus der lotrechten Fallrichtung im Sinne der Fortpflanzung der auffallenden Strahlung bewegt. Nachdem er den intensiven Teil der Strahlung verlassen hat, fällt er wieder lotrecht herab. Manche Probekörper bewegen sich im intensivsten Teile des Strahles in nahezu horizontaler Richtung.

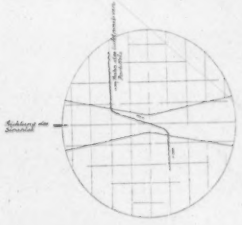


Fig. 2.

Die Bahn eines solchen Probekörpers ist in nachfolgender Fig. 2 gezeichnet. Die Pfeile weisen die Einfallsrichtung des Strahles bzw. die Richtung der Bewegung des Partikels.

Dieses Verhalten zeigen z. B. Goldkugeln, Silberkugeln, Quecksilberkugeln, welche durch galvanische Verdampfung im reinsten trockenen Stickstoff erzeugt wurden, ferner sehr schwach auch Öltröpfchen, sehr stark (als nicht kugelförmig kenntlich) Körperchen von Terpentinruß, Kampferqualm in Luft usw.

Grundversuch II.

Ein Partikel derselben Größenordnung fällt im Gravitationsfelde vertikal nach abwärts, es kommt in den Strahlenkegel und wird von diesem der Richtung der auffallenden Strahlung entgegen geführt. Nach Verlassen des Strahles fällt der Probekörper wieder lotrecht herab.

Eine solche Bahn wird in Fig. 3 abgebildet.

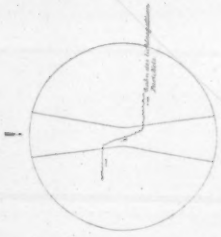


Fig. 3.

Vertreter solcher Probekörper sind: Schwefelkugeln, Selenkügelchen, erzeugt durch Verdampfung im reinsten Argongase (über letztere wird noch einiges zu berichten sein), Salpetersäuretröpfchen, bzw. Zersetzungsprodukte derselben in atmosphärischer Luft, Nebeltröpfchen, erzeugt, indem man Stickoxyde durch Wasser leitet; ausgezeichnete Demonstrationsobjekte sind die Rauchpartikeln einer Zigarre, Verbrennungsprodukte des Holzes usw.

Zu Grundversuch I und II.

Ohne über die Natur der Erscheinung damit zunächst etwas aussagen zu wollen, bezeichnen wir die Partikeln, welche Bewegungsimpulse im Sinne der Fortpflanzungsrichtung der Strahlung erhalten, als lichtpositive, solche, welche der Strahlung entgegenlaufen, als lichtnegative.

Versuche III und IV.

Die beiden Strahlen werden übereinander justiert und gleichzeitig geöffnet. Die Fig. 4 u. 5 zeigen die Bahnen eines lichtpositiven (z. B. Silber) bzw. eines lichtnegativen (z. B. Selen) Probekörpers.

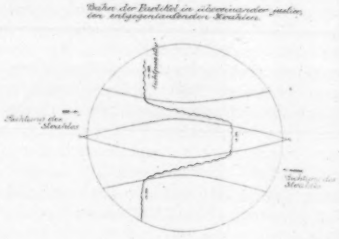


Fig. 4.

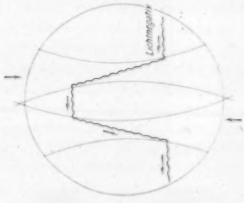


Fig. 5.

Grundversuch V.

Es gibt Probekörper, welche sich mit der uns bisher zur Verfügung gestandenen Strahlungsenergie und in der von uns beobachteten Größenordnung weder im Sinne der einfallenden Strahlung, noch dieser entgegen bewegen. Wir bezeichnen diese als lichtneutral. Vertreter dieser sind Wassernebeltröpfchen in Sauerstoff, hergestellt durch Elektrolyse und ebensolche Tröpfchen in Wasserstoff usw.

Grundversuch VI.

In einem Gemische lichtpositiver und lichtnegativer Materie werden durch den intensiven Strahl Probekörper dieser beiden Materiearten einander gleichzeitig entgegengeführt. Solche Versuche habe ich mit Mischungen von Gold und Rauch, Silber und Schwefel ausgeführt. Ebenso kommt es leicht zur Beobachtung, daß ein Probekörper einen anderen von derselben Materieart in bedeutend größerer Geschwindigkeit in benachbarter Bahn überholt.

Ein eigentümlicher Spezialfall dieser Erscheinung scheint bei Selen vorzuliegen. Durch Verdampfung in reinstem Argongas hergestellte Selenkügelchen verhalten sich außerordentlich stark lichtnegativ. Jedoch entsteht unter Um-

ständen durch Verdampfung bei höherer Temperatur eine Selensuspension, bei der sich einzelne Selenkügelchen orangeroter Farbe besonders intensiv lichtpositiv bewegen, während gleichzeitig die lichtnegative Bewegung der anderen Selenkügelchen anhält. Es scheint sich hier um eine allotrope Modifikation des Selens, die sich lichtpositiv verhält, zu handeln. Die Erscheinung ist z. Z. in näherer Untersuchung.

Es kann also das beobachtete Phänomen der lichtpositiven und lichtnegativen Bewegung ersichtlicherweise nicht durch Strömungen erklärt werden.

Nachfolgende Fig. 6 stellt die gleichzeitig erfolgende Bewegung eines lichtpositiven und eines lichtnegativen Teilchens dar.

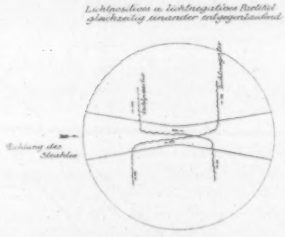


Fig. 6.

Es werden also Substanzen durch das Licht geschieden. Es tritt, wenn man so sagen darf, Photolyse ein. Die ganze beobachtete Erscheinung der Bewegung der Materie im Lichte wollen wir der Kürze halber als Photophorese bezeichnen.

Wir legen uns nun die Frage vor, wovon die Photophorese abhängt, bzw. welcher Natur die Kräfte sind, welche die Photophorese hervorrufen. Sind insbesondere die photophoretischen Kräfte solcher erster oder zweiter Art?

Hängt die Erscheinung von der elektrischen Ladung der Partikeln ab oder nicht?

Grundversuch VII.

Durch Verdampfung hergestellte Probekörper (Schwefel, Quecksilber, Selen) sind, wie erwähnt, beim Fehlen anderer ionisierender Wirkungen vollkommen ungeladen und bleiben es auch in unserem Lichtstrahle vorbeschriebener Art. Es ließe sich jede Auf- oder Abladung bei jedem einzelnen Probekörper sofort konstatieren.

Die lichtpositive wie lichtnegative Photophorese ist auch bei vollkommen ungeladenen und auch so bleibenden Probekörpern vorhanden.

Wir laden die Probekörper mit einem ionisierenden Präparate auf, so daß sie positive oder negative Ladung tragen. Die Erscheinung der Photophorese wird durch den Umstand, daß dieselben Probekörper nunmehr Ladungen tragen, weder qualitativ noch quantitativ geändert. Denn die Geschwindigkeit der Bewegung eines geladenen oder ungeladenen Probekörpers im Lichtstrahle wird bestimmt, sodann wird die elektrische Ladung desselben Probekörpers geändert und seine Geschwindigkeit im Lichtstrahle erneuert bestimmt. Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeit, mit der das Teilchen im Lichtfelde bewegt wird, von der elektrischen Ladung des Probekörpers unabhängig ist.

Die Photophorese hat also nichts zu tun mit der elektrischen Ladung der Probekörper, bzw. mit deren Auf- und Abladung.

Versuch VIII.

Ein geladener Probekörper kann durch das elektrische Feld beliebig oft gehoben werden, und fällt bei abgeschaltetem Felde wieder im Schwerefelde herab. Konzentrieren wir das Licht auf einen so bewegten Probekörper so, daß die photophoretischen Kräfte wirksam werden, dann stellen die in nachfolgenden Fig. 7 u. 8 abgebildeten Bahnen die Bewegung eines lichtpositiven, bzw. eines lichtnegativen Probekörpers dar.

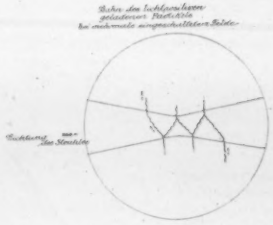


Fig. 7.

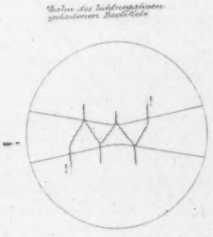


Fig. 8.

Versuch IX.

Man justiert beide einander entgegengerichtete Strahlen exakt in dieselbe Horizontale. Die Fallbewegung eines geladenen Partikels wird durch ein entsprechendes elektrisches Feld aufgehoben. Das Kügelchen wird im Raume gewissermaßen frei aufgehängt. Die Momentverschlüsse gestatten das gleichzeitige Abblenden des einen und das Öffnen des entgegengerichteten Strahles. Auf diese Weise kann ein lichtpositiver Probekörper in der Richtung der einfallenden Strahlen, ein lichtnegativer dagegen gegen die Richtung der einfallenden Strahlen oftmals hin- und hergeführt werden. Bei Probekörpern, bei welchen die photophoretischen Kräfte wesentlich größer sind als die vertikal wirkende Erdschwere, kann der Versuch auch bei ungeladenem Probekörper oder ohne daß die Erdschwere durch ein elektrisches Feld kompensiert wird, wiederholt durchgeführt werden.

Versuch X.

Die Bewegung des Probekörpers wird durch den Strahl sofort eingeleitet. Sie wächst bzw. nimmt ab mit der Intensität des wirkenden Strahles. So wurden z. B. gleiche Wege von $11{,}8 \cdot 10^{-3}$ cm von einem lichtpositiven, bzw. von einem lichtnegativen Körper in nachfolgender Fig. 9 angeführten Sekunden zurückgelegt.

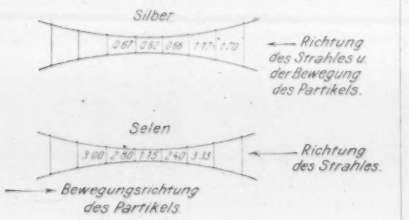


Fig. 9.

Die kürzesten Zeiten beziehen sich auf die Zonen engster Einschnürung des Strahlenkegels, die Geschwindigkeiten nehmen ab gegen den breiten Teil des Strahles. Die auf einer Präzisionsuhr wiederholt gestoppten Zeiten desselben Probekörpers sind die besten Zeugen der Verläßlichkeit der Messung. Die Schwankungen sind nie größer als die durch die Brownsche Bewegung bedingten.

Versuch XI.

Die gleichen Erscheinungen sind auch in spektral zerlegtem Licht oder in durch konzentrierte $CuSO_4$ Lösung filtriertem oder in monochromatischem Lichte zu konstatieren. Allerdings wird bei geringerer Intensität der wirksamen Strahlen die Erscheinung entsprechend schwächer. Doch lassen sich auch hier die Erscheinungen noch messend verfolgen.

Die Erscheinung hängt auch nicht von der schwachen Konvergenz des Doppelkegels des in Photographie 3, Tafel X reproduzierten Strahles ab, denn sie tritt auch in dem in Photographie 4 reproduzierten Parallelstrahle auf.

Grundversuch XII.

Wir erniedrigen den Gasdruck stufenweise; es wurde dies vom Atomsphärendruck bis 14 mm Quecksilber ausgeführt. Die lichtpositiven Materieteilchen bleiben lichtpositiv, ebenso behalten die lichtnegativen Probekörper diese Eigenschaft bei. Die Geschwindigkeit der Photophorese im Felde des Lichtstrahls nimmt aber mit zunehmendem Grade der Verdünnung des umliegenden Gases wesentlich zu.

Bestimmung der photophoretischen Kräfte.

Wir können jetzt die photophoretische Kraft bestimmen, die auf einen Probekörper angreift. Ist $\mathfrak{B}_L$ die Geschwindigkeit im Lichtstrahl, B die uns bekannte Beweglichkeit des Probekörpers, dann ist die photophoretische Kraft $\mathfrak{P}_L$ gegeben durch

$$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{B}_L}{B},$$

sie fällt an Probekörpern von der Größenordnung $2 \cdot 10^{-3}$ cm bis $5 \cdot 10^{-6}$ cm Radius in die Größenordnung 10^{-10} bis 10^{-11} Dyne.

Wir gehen nun zur Entscheidung der Frage, ob die lichtpositive und lichtnegative Photophorese im Sinne unserer Definition als Kraft erster oder Kraft zweiter Art zu qualifizieren ist. Diese Frage läßt sich durch die quantitative Untersuchung der Abhängigkeit dieser Erscheinungen vom Gasdruck entscheiden. In jedem Falle wird die Bewegung des Kügelchens unter dem Einfluß der Lichtkraft durch obige Gleichung beschrieben, in der die Beweglichkeit eine von der Reibung im Gase abhängige Größe darstellt, die vom Radius des Kügelchens und infolge der bei so kleinen Probekörpern auftretenden Gleitung auch vom Gasdrucke abhängig ist. Es werden nun für ein und denselben Probekörper zunächst beim Gasdrucke p_1 die photophoretische Geschwindigkeit $\mathfrak{B}_L^{(1)}$ sowie die Beweglichkeit desselben B_1, sodann für denselben Probekörper beim Gasdruck p_2 $\mathfrak{B}_L^{(2)}$ und B_2 und so in der Evakuierung fortschreitend schließlich $\mathfrak{B}_L^{(i)}$ und B_i bestimmt.

Sodann bildet man die Quotienten

$$\frac{\mathfrak{B}_L^{(1)}}{B_1}, \quad \frac{\mathfrak{B}_L^{(2)}}{B_2}, \quad \ldots \quad \frac{\mathfrak{B}_L^{(i)}}{B_i}.$$

Diese Quotienten bedeuten aber nichts anderes als die bei den Drucken $p_1; p_2, \ldots p_i$ auf den Probekörper ausgeübten photophoretischen Kräfte. Rührt daher die vom Kügelchen unter dem Einfluß der photophoretischen Kraft erreichte Geschwindigkeit $\mathfrak{B}_L$ nur von Kräften erster Art und nicht von Einwirkung des umgebenden Gases (Kräften zweiter Art) her, so muß das Experiment die Unabhängigkeit der Größe dieser Kräfte $\frac{\mathfrak{B}}{B}$ vom Gasdruck ergeben.

Tritt aber eine Abhängigkeit der photophoretischen Kräfte vom Gasdruck ein, dann sind die von der Strahlung übertragenen Kraftwirkungen wenigstens zum Teile vom umliegenden Gase herrührend und Kräfte zweiter Art.

So eröffnet sich die Möglichkeit, diese Kräfte quantitativ und für verschiedene Materialien zu verfolgen. Wir wollen nun den Versuch tatsächlich ausführen. Es wäre nun ideal, die Geschwindigkeit ein- und desselben Probekörpers im Lichtfelde bei verschiedenen Drucken messend zu verfolgen. Bisher ist dieser Versuch noch nicht gelungen, weil man ein Kügelchen, das man bei einem Druck der Messung unterzogen hat, bei Veränderung des Druckes aus dem Auge verliert. Doch ist das kein Hindernis, die Frage trotzdem zur Entscheidung zu bringen, denn wir haben in den einleitenden Erörterungen gesehen, daß alle Silberkügelchen oder Schwefelkügelchen usw. gleichen optischen Bildes (gleicher Farbe) bei demselben Gasdruck gleiche Beweglichkeit aufweisen. Man kommt daher ebenfalls und viel rascher zum Ziele, wenn man die Geschwindigkeiten vieler Probekörper gleichen optischen Verhaltens bei gleicher Intensität der wirksamen Strahlung bestimmt und die Mittelwerte dieser photophoretischen Geschwindigkeiten bei gleichem Gasdruck bildet. So erhält man z. B. für Silberkügelchen gelber Farbe, welche bei Atmosphärendruck die mittlere photophoretische Geschwindigkeit $7{,}9 \cdot 10^{-3}$ cm pro Sekunde hatten, beim Druck von 100 mm Quecksilber lichtpositive Geschwindigkeiten von der Größe $35{,}7 \cdot 10^{-3}$ cm pro Sekunde, ferner beispielsweise bei lichtnegativen blauen Schwefelkügelchen, bei normalem Druck die lichtnegativen Geschwindigkeiten $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ cm pro Sekunde, bei 55 mm Quecksilber Geschwindigkeiten $4{,}09 \cdot 10^{-3}$ cm sec.

In nachfolgenden Tabellen V und VI sind den Gasdrucken die photophoretischen Geschwindigkeiten $\mathfrak{B}_L$ zugeordnet.

Tabelle V.

Lichtpositive photophoretische Kraft an Ag-Partikeln bei verschiedenen Drucken.

Druck in mm Hg	$\mathfrak{B}_L \cdot 10^3$ cm sec	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{B}_L : B \cdot 10^{10}$
760	7,92	7,60	1,035
550	8,57	8,90	0,962
400	10,44	10,80	0,964
320	12,05	12,60	0,956
220	17,60	16,60	1,060
100	35,75	32,10	1,144

Die photophoretischen Kräfte $\mathfrak{B}_L$ für so kleine Silberkugeln bei niederen Drucken, bei welchen die einleitend erwähnte Knudsen-Webersche Korrektur bereits einzutreten hat, weil der Radius des Probekörpers sehr klein gegen die mittlere Weglänge ist, ergeben sich für die Drucke 550, 400, 320, 222 und 100 mm Hg zu 0,95, 0,94, 0,90, 0,96, 0,91 . 10^{-10} Dyne.

Trägt man die Geschwindigkeiten in Kurven als Funktion des Gasdruckes auf, dann wachsen bei allen lichtpositiven wie lichtnegativen Probekörpern die photophoretischen Geschwindigkeiten bei stets kleiner werdenden Drucken immer mehr. (Fig. 10.)

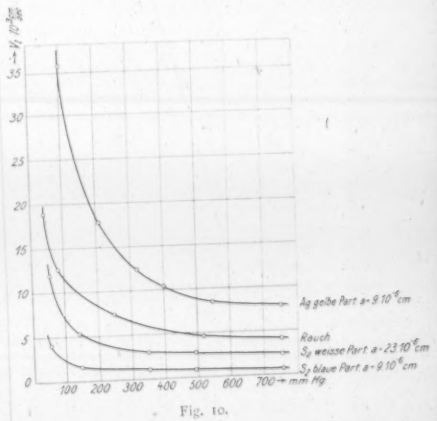


Fig. 10.

Es hat also den Anschein, als würde die Materie in einem absolut leeren Raume mit sehr großer Geschwindigkeit von der Strahlung fortgeführt.

Die Gedanken von Svante Arrhenius über die Fortführung der Materie durch die Strahlung sind also in erweitertem

Tabelle VI.

Lichtnegative photophoretische Kraft an Schwefelkugeln bei verschiedenen Drucken.

Druck in mm Hg	Orange Partikel (Radius = 19 . 10^{-6} cm)			Blaue Partikel (Radius = 9 . 10^{-6} cm)		
	$\mathfrak{B}_L \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{B}_L}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne	$\mathfrak{B}_L \cdot 10^3$	$B \cdot 10^{-7}$	$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{B}_L}{B} \cdot 10^{10}$ Dyne
760	1.70	1.77	0.96	0.60	4.70	0.13
496	1.07	2.10	0.94	0.80	6.48	0.12
354	2.23	2.40	0.93	0.98	7.98	0.12
143	3.93	4.20	0.94	1.57	13.27	0.12
53	8.08	8.90	0.91	4.09	34.25	0.12

Umfange erwiesen worden, denn es gibt nicht nur eine Fortführung der Materie im Sinne der Fortpflanzung der Strahlung, sondern auch in engegengesetzter Richtung.

Nun kann man für jeden Gasdruck die Beweglichkeit der Probekörper bestimmen. Damit ist unmittelbar nach Messung der Geschwindigkeit im Lichtstrahle die Größe der photophoretischen Kraft gegeben, indem wir für jeden Druck die Beziehung

$$\mathfrak{P}_L = \frac{\mathfrak{B}_L}{B}$$

bilden.

Die Konstanz der photophoretischen Kräfte bei verschiedenen Drucken ist geradezu erstaunlich. Es ergeben sich für Silber lichtpositive photophoretische Kräfte, für orange und blaue Schwefelkügelchen lichtnegative photophoretische Kräfte, die ich als Beispiele in Tabelle V und VI, Kolonne 4 bzw. 4 und 7 anführe.

Diese vollkommenere Konstanz (die Abweichungen betragen höchstens einige Prozente), trifft in allen Fällen zu.

So ergibt sich das wichtige und für unsere Schlüsse bedeutsame Resultat, daß die photophoretischen Kräfte vom Drucke des den materiellen Probekörper umgebenden Gases nicht abhängen, sondern bloß von der Intensität der Strahlung und von der physikalischen Beschaffenheit des Probekörpers selbst. Dies gilt sowohl für die lichtpositive wie für die lichtnegative Materie. Wir haben es also bei den photophoretischen Kräften mit Kräften erster Art im Sinne unserer Auseinandersetzungen zu tun.

Nun wollen wir noch einen letzten Punkt besprechen.

Wir wissen bereits, daß mit zunehmender Fallgeschwindigkeit der Probekörper, mit deren zunehmender Größe die Farbe des vom Partikel senkrecht zu den beleuchtenden Strahlen abgebeugten Lichtes, in dem sie zur Beobachtung gelangen, sich zu längeren Wellen verschiebt.

Vergleichen wir die gemessenen Geschwindigkeiten der Fallbewegung mit den photophoretischen Geschwindigkeiten der Probekörper, d. h. stellen wir uns die Frage nach einem Zusammenhange der photophoretischen Geschwindigkeit und der Größe des Partikels, dann sehen wir z. B. in Tabelle I, Kolonne 7 bei Silberkügelchen, daß die photophoretischen Geschwindigkeiten von dem den kleinsten Partikeln zugeordneten Werten von $2 \cdot 10^{-3}$ cm/sec bei den Silberkügelchen mittlerer Größe zu einem Maximum $18 \cdot 10^{-3}$ cm/sec anwachsen, um bei den größten Partikeln wieder zu einem Werte von $7 \cdot 10^{-3}$ cm/sec abzusinken. Wir kommen also zu dem wichtigen Ergebnisse, daß sich ein deutlich ausgeprägtes Maximum der Fortführungsgeschwindigkeit im Lichtstrahle für bestimmte mittlere Fallgeschwindigkeiten oder was nach den vorhergehenden Ausführungen gleichbedeutend ist, für bestimmte mittlere Partikelgrößen ergibt.

Wir können uns jetzt die Frage vorlegen, ob die lichtpositive Bewegung durch Lichtdruck im Sinne der Wellentheorie hervorgerufen wird. Greifen wir diesbezüglich auf die Erörterungen Schwarzschilds über den Druck des Lichtes auf kleine Kugeln zurück.

Man kann die Gedanken dieses Autors etwa folgendermaßen kurz zusammenfassen: Bei großen Kugeln ist das Verhältnis V des Lichtdruckes zur auf die Kugel vom Radius a auffallenden Energie der Einstrahlung im Sinne der Wellentheorie des Lichtes gleich eins. Wenn aber die Kugeln in ihren Dimensionen an die Lichtwellenlängen heranragen, dann spielt auch bei diesem Problem die Beugung der Strahlung die entscheidende Rolle. Für vollkommen reflektierende Kugeln hat Schwarzschild in der von uns erwähnten Studie das Verhalten folgendermaßen gekennzeichnet: Das Verhältnis des Lichtdruckes $\mathfrak{P}$ zur einfallenden Energiemenge $\pi a^2 w$, worin w die Energiedichte der

Strahlung bedeutet, steigt von dem für große Kugeln gültigen und auch von Svante Arrhenius benutzten Werte 1 zunächst langsam an, wenn man den Kugelradius verkleinert. Ist der Kugelhalbmesser auf ein Drittel der Wellenlänge herabgesunken, dann erfolgt ein merkwürdiges rapides Anwachsen, welches bei Kugeln von etwa ein sechstel Wellenlänge der einfallenden Strahlung Halbmesser zu einem Maximum in der Größe 2,5 führt. Bei weiterer Verkleinerung des Kugelhalbmessers sinkt das Verhältnis

$$V = \frac{\mathfrak{P}}{\pi a^2 w}$$

noch plötzlicher ab, als es vorher angestiegen war. Für Kugelradien vom Zehntel der Wellenlänge des Lichtes ist es wieder unter die Einheit zurückgegangen und nimmt alsbald verschwindend kleine Werte an.

Für die Wellenlängen des von mir benutzten Strahles wäre die maximale Photophorese an vollkommen reflektierenden Kugeln vom Radius $10 \cdot 10^{-6}$ cm zu gewärtigen. Im Speziellen hat aber Gerda Laski in Wien nach den Debyeschen Formeln das Maximum von

$$\frac{\mathfrak{P}}{\pi a^2 w}$$

für Silberkugeln vom komplexen Brechungsexponenten N berechnet. Aus diesen Rechnungen folgt, daß für die Strahlung der von uns verwendeten Wellenlänge die maximale Wirkung des Lichtdruckes durch die Beugung des Lichtes an diesen Silberkugeln beim Kugelradius $a = 9.8 \cdot 10^{-6}$ cm erfolgen muß, wie Fig. 11 beweist.

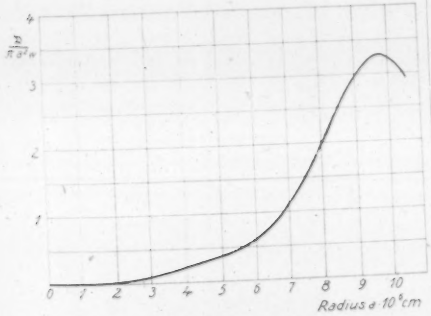


Fig. 11.

Vergleichen wir damit die in der Tabelle I, Kolonne 7 bzw. 3 angeführten experimentell gewonnenen Zahlen, dann finden wir, daß die lichtpositive photophoretische Kraft — lediglich gemessen durch die Fortführungsgeschwindigkeit im Lichtstrahl, geteilt durch die Beweglichkeit der Kügelchen — bei den Silberkugeln tatsächlich ein deutlich ausgeprägtes Maximum aufweist. Dies Maximum kommt dem Probekörper 17, Tabelle I, mit einer photophoretischen Geschwindigkeit $18 \cdot 10^{-3}$ cm/sec zu. Der Radius dieser Silberkugel muß also zufolge dieses Beugungsmaximums der Strahlung $9{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm betragen.

Dieses hiermit gewonnene neue Verfahren der Größenbestimmung submikroskopischer Probekörper kann jetzt mit den beiden einleitend erörterten verglichen werden. Blickt man in der Zeile des Probekörpers Nr. 17 Tabelle I auf die Kolonne 4 und 5, dann findet man für den Radius aus der Fallgeschwindigkeit $9{,}86 \cdot 10^{-6}$ cm, aus der Farbe des Radius $9 \cdot 10^{-6}$ cm.

Diese drei Größenbestimmungen sind aber voneinander vollkommen unabhängig; die erste ergibt sich aus der beobachteten Fallgeschwindigkeit auf Grund mechanischer Gesetze, die zweite folgt aus der beobachteten abgebeugten Farbe des Probekörpers auf Grund der Wellentheorie des Lichtes, die dritte aus dem beobachtetem Maximum der photophoretischen Geschwindigkeit.

Daraus können wir dreierlei erschließen:

1. auch bei den photophoretischen Kräften spielt die Beugung eine hervorragende Rolle.

2. unsere Größenbestimmung der Probekörper sowohl aus der Farbe (Beugung des Lichtes) sowie aus der Fallgeschwindigkeit (Stokes-Cunninghamsches Gesetz) war richtig. Denn das photophoretische Maximum ist aus ganz anderen Meßbereichen und Grundlagen der Physik gerade bei jener Kugelgröße gefunden worden, die auch die Fallgeschwindigkeit und die beobachtete Farbe denselben Probekörpern zuschrieb.

3. Diese dritte Größenbestimmung der Probekörper erhärtet erneuert die Schlüsse des ersten Teiles meiner Auseinandersetzungen. Denn durch diese neue Kapazitätsbestimmung (Größenbestimmung) ist eine erneute Ladungsbestimmung erfolgt.

Ich muß bemerken, daß auch die lichtnegative photophoretische Kraft ein ausgesprochenes Maximum aufweist, so daß man auch hier auf Einfluß der Beugung schließen muß. Dies tritt bei Schwefelkügelchen beim Radius $26 \cdot 10^{-6}$ cm, bei Selenkügelchen beim Radius $15 \cdot 10^{-6}$ cm ein, wie aus den Messungen von I. Parankiewicz in Wien hervorgeht.

Über den quantitativen Vergleich der einstrahlenden Energie und der positiven photophoretischen Kraft werde ich bald an anderer Stelle berichten.

Ich erwähne jetzt noch einen einfachen Versuch. Man kann z. B. ein lichtpositives oder lichtnegatives Körperchen vom Gewichte mg von einem vertikal nach aufwärts gerichteten Strahle treffen lassen. Dieser Versuch scheint mir darum von besonderem Interesse, weil er eine experimentelle Nachahmung der kosmischen Dynamik der Kometenschweife darstellt. Es werden so nicht nur jene Kometenschweife erklärlich, die sich von der Sonne ab, sondern auch solche, welche sich dieser zuwenden. (Svante Arrhenius, Bredechin.)

Zum Schlusse möchte ich erwähnen, daß die Geschwindigkeit der Kügelchen in den verschiedenen Zonen des Strahlquerschnittes das beste Maß der Energieverteilung im Strahle selbst ist. Gelingt es doch auf diese Weise mit solchen Probekörpern die Energieverteilung in einem solchen im Durchmesser nur $^1/_{100}$ cm betragenden Strahle vielleicht noch sicherer zu messen, als dies in größeren Bereichen auf anderen Gebieten der Physik bisher möglich war. Diese Probekörper sind also nicht nur das empfindlichste Elektrometer, sondern auch ein Bolometer im wahrsten Sinne des Wortes. Weitere theoretische Schlüsse, so naheliegend und interessant sie auch wären, will ich der Zukunft vorbehalten, da in diesen Auseinandersetzungen die Erfahrungstatsachen im Vordergrunde stehen sollen. —

Wien, Universität Mai 1917.

(Eingegangen 24. Mai 1917.)

Berichtigung

zur Arbeit Schallfelder und Schallantennen II, diese Zeitschrift 18, 261 ff., 1917.

Die Tabelle VII auf Seite 269 weist Fehler auf und ist durch folgende zu ersetzen:

R	d	n_l	n_w	d_l	d_n
2,1	0,06	1315	1007	0,006	0,034
2,1	0,065	1542	1162	0,011	0,046
3,3	0,13	1750	1137	0,032	0,113

Einzelne von den Membranen wurden nämlich auch in geschlossenen Wasserräumen untersucht, und diese Messungen sind z. T. verschentlich in die für das freie Wasser gültige Tabelle eingetragen worden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. P. Zistler vom Meteorologischen Institut in München zum zweiten Abteilungsvorsteher an der Kaiserlich Osmanischen Zentralanstalt für Witterungskunde in Konstantinopel, das Mitglied der École supérieure d'électricité in Paris und Direktor des französischen Hochschulwesens Lucien Poincaré zum Rektor der Universität Paris, der ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Martin Näbauer in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Karlsruhe, Dr. Bela Szilard zum Professor für Radiologie an der Universität Madrid, der Privatdozent für Physik an der Universität Gießen Dr. Paul Cermak zum a. o. Professor, der Privatdozent für physikalische Chemie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Kasimir Fajans zum Vorstand der physikalisch-chemischen Abteilung des chemischen Laboratoriums der Universität München.

Berufen: Der a. o. Professor für Chemie an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Freiherr Reinhold v. Walther in eine neu zu errichtende Professur für Gewinnung und Verwertung der Nebenprodukte der Braunkohle an der Bergakademie Freiberg.

Verliehen: Dem ord. Honorarprofessor der theoretischen Physik an der Universität Marburg Dr. Wilhelm Feußner der Titel Geh. Regierungsrat, den Privatdozenten der Chemie an der Universität Berlin Dr. Joseph Houben, Dr. Hans Pringsheim und Dr. Artur Stähler der Titel Professor.

Vom Lehramt zurück: Der Honorarprofessor für Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Richard Heger.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Geh. Hofrat Dr. Martin Disteli.

Angebote.

Für unser wissenschaftliches Laboratorium suchen wir

mehrere Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung. Bevorzugt werden Herren, welche Erfahrungen auf dem Röhrengebiet (Gasionisation, Elektronenemission) besitzen.

Stellungsgesuche mit Gehaltsforderung, Militärverhältnissen, frühestem Eintrittstermin und Lichtbild erbeten unter **S. H. 498** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Für **Laboratorium** suchen wir einen

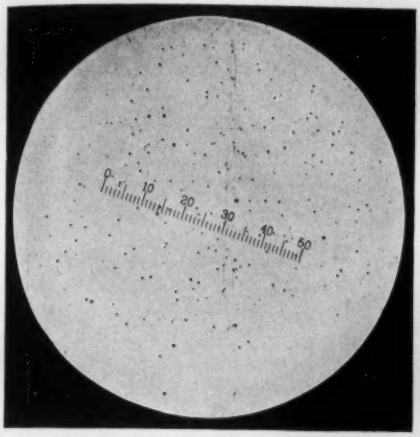
Physiker

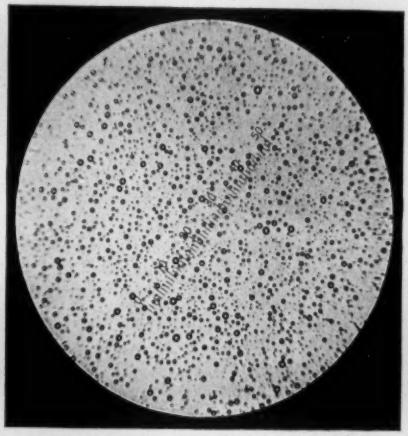
mit Erfahrungen auf dem Gebiete des Elektrizitätsdurchganges durch Gase. Bewerbungsgesuche mit Lebenslauf und Angabe der Gehaltsansprüche sind zu richten an

Siemens & Halske A.-G. Wernerwerk, Abt. M. Siemensstadt bei Berlin.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

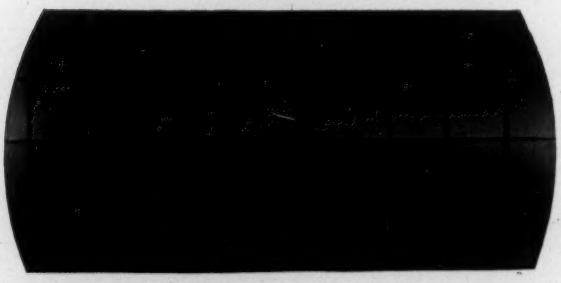
Schwefelkugeln





Aufgelöst mit Trockensystem Apertur 0,95. 1 pars des Okularmaßstabes = $35{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm.
Photographie 1. Photographie 2.

Dunkelfeldbild des Strahles, in dem die Fortführung der Materie beobachtet wird.
1 pars des Okularmaßstabes vertikal $11{,}8 \cdot 10^{-3}$ cm, horizontal $11{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm.
Photographie 3.



Photographie 4.